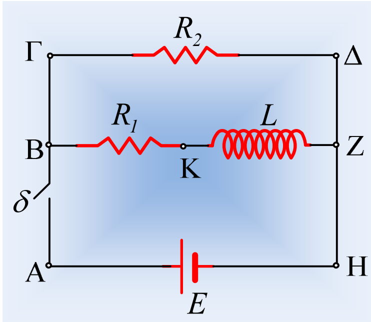
Ένα Χρονοκύκλωμα με πηνίο



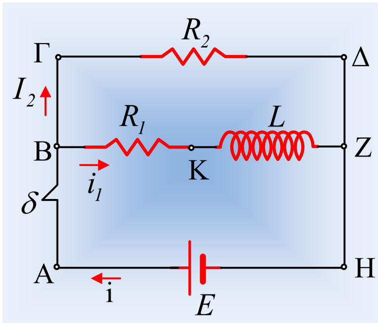
Στο κύκλωμα του σχήματος δίνονται: E=40V, R_1=4Ω, R_2=4Ω, L=0,2H. Τη χρονική στιγμή t_0=0 κλείνουμε το διακόπτη και τη στιγμή t_1=0,5s, τον ανοίγουμε.

i) Να βρεθεί η ένταση του ρεύματος που διαρρέει κάθε κλάδο του κυκλώματος για $t=0^+$ (αμέσως μετά το κλείσιμο του διακόπτη) καθώς και ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της έντασης.

ii) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των εντάσεων των ρευμάτων, σε συνάρτηση με το χρόνο.

iii) Να γίνουν επίσης οι γραφικές παραστάσεις σε συνάρτηση με το χρόνο, των τάσεων $V_{ΓΔ}$, V_{BZ} και V_{BK}.

Απάντηση:



i) Κλείνοντας το διακόπτη, η τάση στα άκρα του αντιστάτη R_2, η τάση $V_{ΓΔ}$=E παραμένει σταθερή, οπότε ο αντιστάτης διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης:

$$I_2 = \frac{V_{ΓΔ}}{R_2} = \frac{E}{R_2} = \frac{40V}{4Ω} = 10\,A$$

Εφαρμόζοντας εξάλλου το 2^o κανόνα του Kirchhoff στο βρόχο ΑΒ-ΖΗΑ παίρνουμε:

$$E - i_1 R_1 - L\frac{di_1}{dt} = 0 \quad (1)$$

Οπότε η εξίσωση για την ένταση i_1 που διαρρέει τον αντιστάτη R_1 είναι:

$$i_1 = \frac{E}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R_1}{L}t}\right) \rightarrow$$

$$i_1 = \frac{40V}{4Ω}\left(1 - e^{-\frac{4}{0,2}t}\right) = 10\left(1 - e^{-20t}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

Η ένταση αυτή σταθεροποιείται στην τιμή $i_{1max}=I_1$=10A σε άπειρο θεωρητικά χρόνο, αλλά στην πράξη δεχόμαστε ότι τη στιγμή $t_2 = 5\tau = 5\frac{L}{R_1} = 5\frac{0,2}{4}s = 0,25s$ έχει αποκτήσει τη μέγιστη τιμή της.

Και από τον 1^o κανόνα του Kirchhoff:

$$i=i_1+I_2= = 10\left(1 - e^{-20t}\right) + 10 = 20 - 10e^{-20t} \quad \text{(S.I.)}$$

Αλλά τη στιγμή t_0=0, η τιμή της είναι i_1=0, οπότε η πηγή διαρρέεται από ρεύμα:

$$i=i_1+I_2=10\,A.$$

Εξάλλου, αφού η ένταση I_2 είναι σταθερή $\frac{dI_2}{dt} = 0$, ενώ από την (1) παίρνουμε:

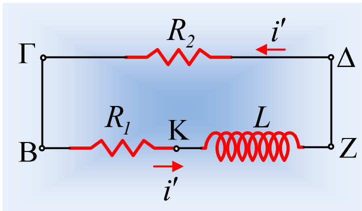
$$\frac{di_1}{dt} = \frac{E}{L} = \frac{40V}{0,2H} = 200\,A/s$$

Και από τον 1^{ο} κανόνα του Kirchhoff:

$$i = i_1 + I_2 \rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} = 200\,A/s$$

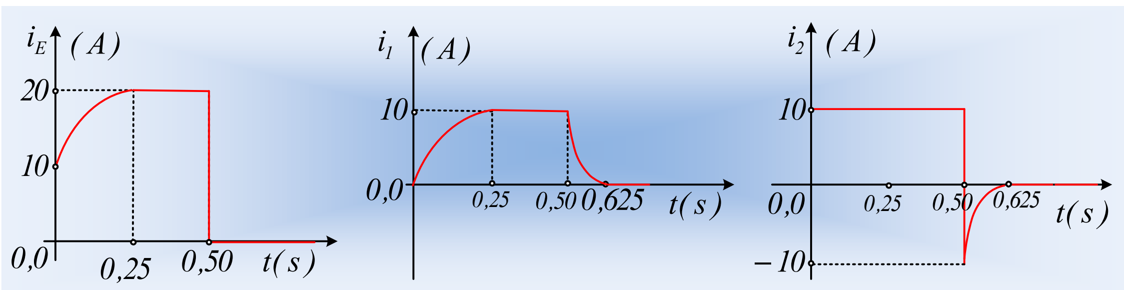
ii) Μόλις ανοίξουμε το διακόπτη, το κύκλωμά μας μετατρέπεται σε αυτό που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου το πηνίο λειτουργώντας ως πηγή προκαλεί ρεύμα στο κύκλωμα έντασης i΄ με εξίσωση:

$$i' = I_{01} e^{-\frac{R_1+R_2}{L}t'} = 10e^{-\frac{8}{0,2}t'} = 10e^{-40t'} \quad \text{(S.I.)}$$



Όπου t΄=t-t_1. Η ένταση του ρεύματος θα μηδενιστεί σε θεωρητικά άπειρο χρόνο, αλλά πρακτικά θεωρούμε ότι μηδενίζεται σε χρονικό διάστημα Δt=$5\tau' = 5\frac{L}{R_1+R_2} = 5\frac{0,2}{8}s = 0,125s$, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t_3=t_1+\Delta t=0,625$s.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο αντιστάτης R_1 και στις δύο περιπτώσεις (κλείσιμο και άνοιγμα του διακόπτη) διαρρέεται από ρεύμα της ίδιας φοράς, πράγμα που δεν συμβαίνει για τον αντιστάτη R_2, όπου με κλειστό το διακόπτη του ρεύμα έχει φορά από το Γ→Δ, ενώ αντίθετα μετά το άνοιγμα του διακόπτη, η φορά του ρεύματος είναι από το Δ→Γ. Με βάση αυτά οι γραφικές παραστάσεις έχουν τις παρακάτω μορφές:



iii) Με βάση τις προηγούμενες γραφικές παραστάσεις και τα πρόσημα που χρησιμοποιήσαμε, έχουμε για της τάσεις:

Από 0-0,5s, $V_{ΓΔ}=V_{BZ}=E=40V$, ενώ για την τάση V_{BK} έχουμε:

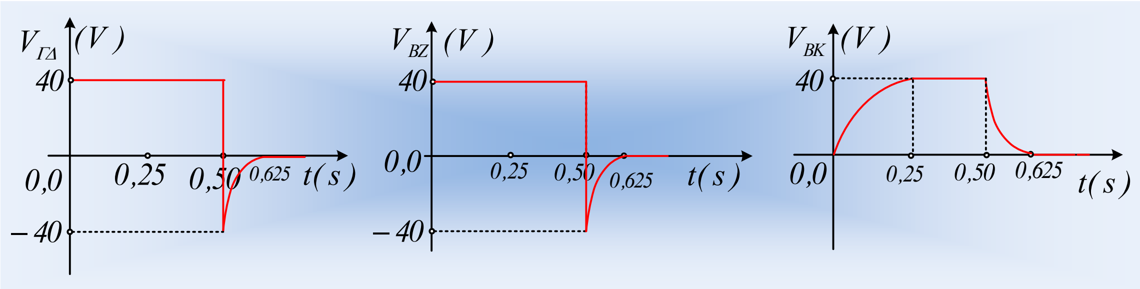
$$V_{BK} = i_1 R_1 = 40\left(1 - e^{-20t}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

Από 0,5s=0,625s έχουμε:

$$V_{BZ} = V_{ΓΔ} = -i'R_2 = -40e^{-40t'}$$

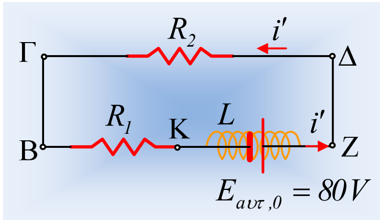
$$V_{BK} = i'R_1 = 40e^{-40t'}$$

Με γραφικές παραστάσεις, όπως στα σχήματα:



Σχόλιο.

Με το άνοιγμα του διακόπτη, το κύκλωμα μετατρέπεται σε αυτό του διπλανού σχήματος, όπου το πηνίο λειτουργεί ως πηγή με αρχική ΗΕΔ, $E_{αυτ}$=i΄(R_1+R_2)=80V, οπότε σε κάθε αντιστάτη έχουμε μια πτώση τάσης $V_{ΔΓ}$=$V_{ΒΚ}$=40V.



dmargaris@gmail.com