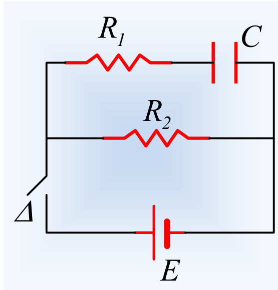
Ένα χρονοκύκλωμα με πυκνωτή.



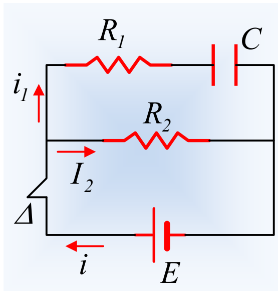
Στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος, δίνονται ότι $R_1=R_2=10K\Omega$, $C=50\mu F$ και $E=100V$. Τη στιγμή $t_0=0$, με τον πυκνωτή αφόρτιστο, κλείνουμε το διακόπτη Δ και τη στιγμή $t_1=3s$ τον ανοίγουμε.

i) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των εντάσεων των ρευμάτων που διαρρέουν τους κλάδους του κυκλώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογιστούν τα εμβαδά των χωρίων που σχηματίζονται από τις γραφικές παραστάσεις και τον άξονα των χρόνων.

ii) Να βρεθεί η ολική ενέργεια που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα.

iii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της έντασης του ρεύματος που διαρρέει την αντίσταση R_2, τη χρονική στιγμή t_2 που η τάση στα άκρα της είναι ίση με 40V.

Απάντηση:



Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι εντάσεις των ρευμάτων που διαρρέουν τους τρεις κλάδους του κυκλώματος.

i) Ο αντιστάτης με αντίσταση R_2 διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης:

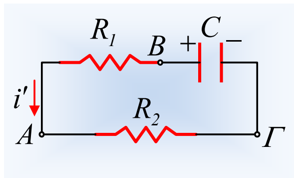
$$I_2 = \frac{E}{R_2} = \frac{100V}{10.000\Omega} = 0{,}01A = 10mA$$

Αντίθετα ο αντιστάτης R_1 διαρρέεται από ρεύμα μεταβλητής έντασης, αφού μέσω αυτού, φορτίζεται ο πυκνωτής σε τάση E. Για την τιμή της έχουμε:

$$i_1 = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{100V}{10.000\Omega} e^{-\frac{t}{10^4 \cdot 50 \cdot 10^{-6} s}} = 0{,}01 e^{-2t} \quad \text{(S.I.)}$$

Εξάλλου από τον 1ο κανόνα του Kirchhoff βρίσκουμε ότι η πηγή διαρρέεται από ρεύμα έντασης:

$$i = i_1 + I_2 = 0{,}01\left(1 + e^{-2t}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

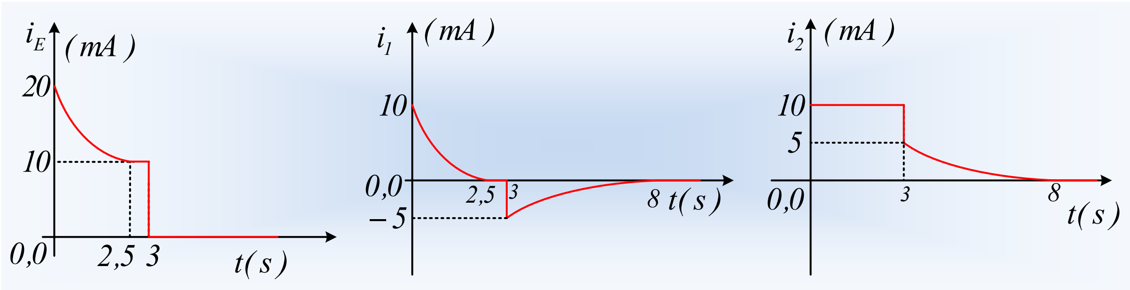


Το χρονικό διάστημα φόρτισης του πυκνωτή, είναι πρακτικά ίσο με $t'=5\tau=5R_1C=2{,}5s$, οπότε τη στιγμή t_1 που ανοίγουμε το διακόπτη, ο πυκνωτής είναι φορτισμένος σε τάση $V_{cmax}=E$, οπότε αρχίζει να εκφορτίζεται στο κύκλωμα του διπλανού σχήματος, με ρεύμα έντασης i΄ με φορά, όπως έχει σημειωθεί στο σχήμα και τιμή:

$$i' = I'_0 e^{-\frac{t}{R_{o\lambda}C}} = \frac{E}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}} = \frac{100V}{20.000\Omega} e^{-\frac{t}{2 \cdot 10^4 \cdot 50 \cdot 10^{-6} s}} = 0{,}005 e^{-t} \quad \text{(S.I.)}$$

Για χρονικό διάστημα $\Delta t=5\tau'=5s$, δηλαδή μέχρι τη χρονική στιγμή $t'=8s$.

Αν θεωρήσουμε θετική την ένταση του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη R_1 κατά την φορά Α→Β (με το διακόπτη κλειστό), τότε η ένταση του ρεύματος που τον διαρρέει από 3s-8s θα είναι αρνητική. Αντίθετα για τον αντιστάτη R_2 οι δύο εντάσεις έχουν την ίδια φορά Α→Γ. Έτσι με βάση τα παράπανω παίρνουμε τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις.



Το εμβαδόν κάθε χωρίου στο διάγραμμα i-t είναι αριθμητικά ίσο με το φορτίο που περνά από μια διατομή του σύρματος. Αλλά το μέγιστο φορτίο που αποθηκεύεται στον πυκνωτή είναι ίσο:

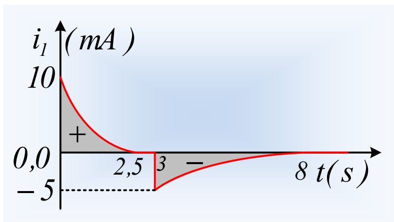
$$Q=CE=50\cdot 10^{-6}\cdot 100C=5mC.$$

Αλλά τότε από 0-3s, από τον αντιστάτη R_1 περνά φορτίο $Q_{1,1}=Q_C=5mC$, από την R_2 περνά φορτίο $Q_{2,1}=I_2t=30mC$, οπότε από την πηγή περνά φορτίο $Q_E=Q_C+Q_{2,1}=35mC$.

Από 3s-8s, η πηγή δεν διαρρέεται από ρεύμα, ενώ από τους δύο αντιστάτες, περνά φορτίο $Q_C=5mC$, αφού ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Έτσι το ολικό φορτίο που μετακινείται μέσα από κάθε δίπολο είναι:

$$Q_E=35mC,\ Q_1=+5mC+(-5mC)=0 \text{ και } Q_2=30mC+5mC=35mC.$$

Σχόλιο:



Αν πάρουμε το μεσαίο διάγραμμα τα εμβαδά των δύο χωρίων με γκρι χρώμα, είναι ίσα. Το 2ο όμως, μετρώντας φορτίο, το παίρνουμε ως αρνητικό, οπότε $Q_{1,2}=-5mC$.

ii) Η συνολική ενέργεια που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα είναι:

$$W_\pi = EQ_E = 100\cdot 35\cdot 10^{-3}J = 3{,}5J$$

iii) Τη στιγμή που $V_2=V_{ΑΓ}=40V$, $i=\dfrac{V_2}{R_2}=4mA$ θα ισχύει επίσης $V_1=V_{ΒΑ}=40V$, οπότε $V_C=V_{ΒΓ}=80V$, όπου:

$$V_C = i(R_1+R_2) \rightarrow$$

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{di}{dt}(R_1+R_2) \rightarrow$$

$$\frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{di}{dt}(R_1+R_2) \rightarrow$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{i}{C(R_1+R_2)} = \frac{4\cdot 10^{-3}}{50\cdot 10^{-6}\cdot 20.000}A/s = 4\cdot 10^{-3}A/s$$

dmargaris@gmail.com