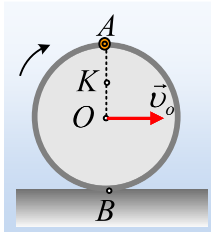
Η γωνιακή ταχύτητα και το cm ενός στερεού.



Στην περιφέρεια μιας στεφάνης μάζας m και ακτίνας R=0,5m, έχει συνδεθεί ένα σημειακό σώμα Α ίδιας μάζας m, δημιουργώντας έτσι ένα στερεό s. Το στερεό s κυλίεται σε οριζόντιο επίπεδο με **σταθερή** ταχύτητα του κέντρου Ο της στεφάνης υ_o=4m/s.

i) Πόση είναι η ταχύτητα του σημείου Β, επαφής του στερεού με το έδαφος;

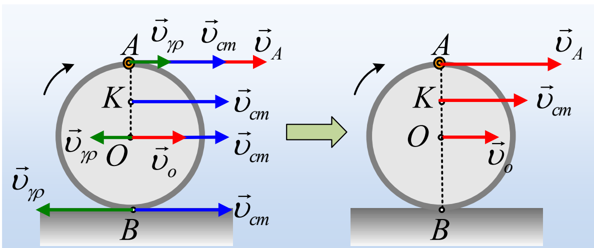
ii) Το κέντρο μάζας του στερεού s, είναι το σημείο Κ, στο μέσον της ακτίνας ΟΑ. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σημείου Κ στην θέση που δείχνει το σχήμα, καθώς και η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού s τη στιγμή αυτή.

iii) Μετά από λίγο η ακτίνα ΟΑ γίνεται οριζόντια. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος Α στη θέση αυτή.

Απάντηση:

i) Αφού το στερεό s (στεφάνη-σώμα Α) κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει), το σημείο επαφής Β με το οποίο έρχεται σε επαφή με το επίπεδο, θα έχει την ταχύτητα ενός σημείου Β΄ του επιπέδου, συνεπώς θα έχει μηδενική ταχύτητα, υ_B=0.

ii) Το κέντρο μάζας Κ στην θέση αυτή θα έχει οριζόντια ταχύτητα υ_{cm}, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε θεωρώντας την κίνηση του στερεού ως σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα υ_{cm} και μια στροφική **γύρω από το Κ** με γωνιακή ταχύτητα ω, το Ο θα έχει ταχύτητα υ_{cm}-$\upsilon_{\gamma\rho}$, ενώ το Α ταχύτητα υ_{cm}+$\upsilon_{\gamma\rho}$, όπως στο σχήμα.



Αλλά η ταχύτητα του σημείου Β είναι μηδενική, οπότε:

$$\upsilon_{cm}=\upsilon_{\gamma\rho/B} \rightarrow \upsilon_{cm} = \omega \cdot \frac{3R}{2} \quad (1)$$

Ενώ για την ταχύτητα του Ο έχουμε:

$$\upsilon_o=\upsilon_{cm}-\upsilon_{\gamma\rho/o} \rightarrow \upsilon_o = \upsilon_{cm} - \omega \cdot \frac{R}{2} \quad (2)$$

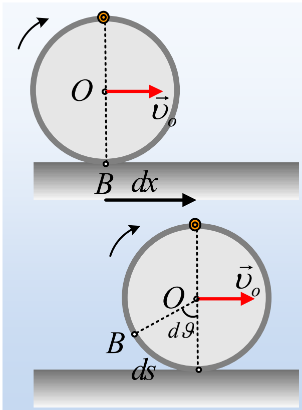
Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\upsilon_o = \omega \cdot \frac{3R}{2} - \omega \cdot \frac{R}{2} \rightarrow \upsilon_o = \omega R \quad (3) \text{ ή}$$

$$\omega = \frac{\upsilon_o}{R} = \frac{4}{0,5} rad/s = 8 rad/s$$

$$\text{Και } \upsilon_{cm} = \omega \cdot \frac{3R}{2} = 8 \cdot \frac{3 \cdot 0,5}{2} m/s = 6 m/s = \upsilon_K$$

Σχόλιο:



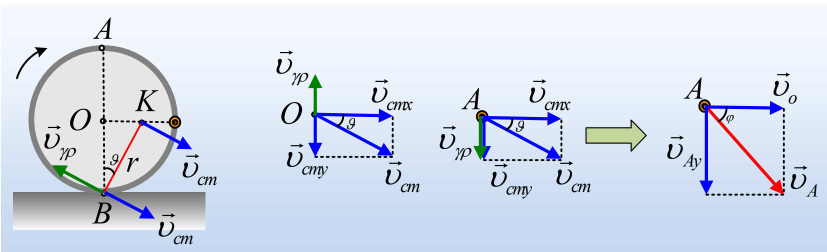
Αξίζει να σημειωθεί το αποτέλεσμα της σχέσης (3) $\upsilon_o=\omega R$. Σχέση που θυμίζει τη σχέση του βιβλίου, αλλά **ΠΡΟΣΟΧΗ**, η ταχύτητα υ_o δεν είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας K αλλά του άξονα περιστροφής του στερεού s.

Γιατί να ισχύει η ίδια σχέση; Ας το δούμε αναλυτικά.

Αν ο άξονας περιστροφής που περνά από το κέντρο της στεφάνης, κινείται με σταθερή ταχύτητα υ_o, σε χρόνο dt θα έχει μετατοπισθεί οριζόντια κατά $dx=\upsilon_o \cdot dt$. Στον ίδιο χρόνο, αν η γωνιακή ταχύτητα είναι ω, το στερεό θα έχει περιστραφεί κατά γωνία dθ και ένα σημείο B της περιφέρειάς του θα έχει στραφεί κατά τόξο ds, όπου $ds=d\theta \cdot R$. Για να έχουμε κύλιση θα πρέπει dx=ds ή

$$\upsilon_o \cdot dt = \omega \cdot dt \cdot R \rightarrow \upsilon_o = \omega \cdot R \ (3)$$

iii) Έστω υ_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας K του στερεού s, οπότε την ίδια ταχύτητα θα έχουν και όλα τα σημεία του στερεού, όσον αφορά τη μεταφορική κίνηση. Αλλά τότε το σημείο B, το οποίο έχει μηδενική ταχύτητα, θα έχει και μια γραμμική ταχύτητα αντίθετης φοράς, λόγω περιστροφικής κίνησης γύρω από το K.



Αλλά τότε η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα υ_{cm} με την οριζόντια διεύθυνση, είναι ίση με τη γωνία OBK (οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές) όπου $\varepsilon\varphi\theta = \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2}$, ενώ:

$$r = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{5}}{2} \quad (4)$$

Ερχόμαστε τώρα στο σημείο O (δεύτερο σχήμα). Αφού η ταχύτητά του παραμένει σταθερή, οριζόντια με μέτρο υ_o=4m/s, θα έχουμε $\upsilon_{cmx}=\upsilon_o \rightarrow$

$$\upsilon_{cm}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=\upsilon_o\to\upsilon_{cm}=\frac{\upsilon_o}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{4}{\frac{R}{R\sqrt{5}/2}}m/s=2\sqrt{5}m/s$$

Εξάλλου για να είναι οριζόντια η ταχύτητα του άξονα Ο, θα πρέπει $\upsilon_{\gamma\rho/o}=\upsilon_{cmy}$ ή

$$\omega\frac{R}{2}=\upsilon_{cm}\cdot\eta\mu\theta\to\omega=\frac{2\upsilon_{cm}}{R}\cdot\eta\mu\theta=\frac{2\cdot2\sqrt{5}}{R}\frac{R/2}{R\sqrt{5}/2}=8rad/s$$

Πράγμα αναμενόμενο, με βάση το προηγούμενο σχόλιο, ότι ισχύει η σχέση $\upsilon_o=\omega\cdot R$ για την ταχύτητα του άξονα και τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του στερεού s.

Ερχόμαστε τώρα στο σώμα Α και στο 3^o σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις συνιστώσες ταχύτητας, όπου $\upsilon_{cmy}=\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot\frac{1}{2}R=8\cdot\frac{1}{2}\cdot0{,}5m/s=2m/s$ και $\upsilon_{Ay}=\upsilon_{cmy}+\upsilon_{\gamma\rho}=4m/s$, ενώ $\upsilon_{Ax}=\upsilon_o=4m/s$. Έτσι για το μέτρο της ταχύτητας του Α έχουμε:

$$\upsilon_A=\sqrt{\upsilon_{Ax}^2+\upsilon_{Ay}^2}=\sqrt{4^2+4^2}m/s=4\sqrt{2}m/s$$

Ενώ η διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία φ=45° με την οριζόντια διεύθυνση (διαγώνιος τετραγώνου.

Σχόλιο για καθηγητές.

Αν δουλεύαμε με την βοήθεια του στιγμιαίου άξονα περιστροφής του στερεού, οριζόντιο άξονα κάθετο στο επίπεδο που περνά από το σημείο επαφής Β, προφανώς τα πράγματα θα ήταν πολύ ευκολότερα στην διαπραγμάτευσή τους…

dmargaris@gmail.com