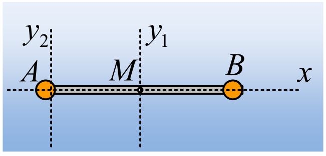
Μερικοί υπολογισμοί ροπής αδράνειας.

Παρακάτω ας δούμε μερικά παραδείγματα υπολογισμού της ροπής αδράνειας στερεών.

Άσκηση 1η:



Στα άκρα μιας αβαρούς ράβδου μήκους l=2m έχουν προσδεθεί δυο σημειακές μάζες των 2kg, όπως στο σχήμα, δημιουργώντας έτσι ένα στερεό S. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του στερεού S, ως προς τους άξονες:

i) y_1, ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και περνά από το μέσον της ράβδου Μ.

ii) παράλληλον άξονα y_2 που περνά από το άκρο Α.

iii) άξονα z που περνά από το Μ και είναι κάθετος στο επίπεδο της σελίδας.

iv) τον άξονα x κατά μήκος της ράβδου.

Απάντηση:

i) Η ροπή αδράνειας του στερεού S είναι το άθροισμα $I=\Sigma m_i R_i^2$, που σημαίνει:

$$I = m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + (m_1'r_1^2 + m_2'r_2^2 + \ldots m_\nu r_\nu^2)$$

Όπου η παρένθεση αναφέρεται στη ροπή αδράνειας της ράβδου. Αλλά από τη στιγμή που αυτή θεωρείται αβαρής, η παρένθεση είναι μηδενική και

$$I_{y_1} = m_1R_1^2 + m_2R_2^2 = 2\cdot 1^2 kgm^2 + 2\cdot 1^2 kgm^2 = 4kgm^2.$$

ii) Με την ίδια λογική ως προς τον άξονα y_2 έχουμε:

$$I_{y_2} = m_1R_1^2 + m_2R_2^2 = 2\cdot 0^2 kgm^2 + 2\cdot 2^2 kgm^2 = 8kgm^2.$$

Εναλλακτικά με χρήση του θεωρήματος Steiner:

$$I_{y_2} = I_{cm} + Md^2.$$

Όπου $I_{cm} = I_{y_1} = 4kgm^2$ αφού το κέντρο μάζας του στερεού είναι το μέσον της ράβδου Μ. Έτσι:

$$I_{y_2} = I_{cm} + Md^2 = 4kgm^2 + 4kg\cdot 1^2 m^2 = 8kgm^2.$$

iii) Ο άξονας z περνά επίσης από το κέντρο μάζας και είναι κάθετος στη ράβδο, οπότε και πάλι:

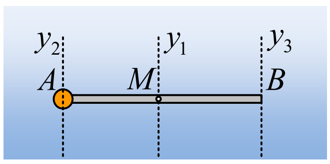
$$I_z = I_{y_1} = m_1R_1^2 + m_2R_2^2 = 4kgm^2.$$

iv) Για τον άξονα x θα έχουμε επίσης:

$$I_x = m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + (m_1'r_1^2 + m_2'r_2^2 + \ldots m_\nu r_\nu^2) = 0$$

Αφού οι αποστάσεις των σημειακών μαζών από τον άξονα x είναι μηδενική.

Άσκηση 2η:



Στο άκρο Α μιας ομογενούς ράβδου μάζας Μ=2kg και μήκους l=2m έχουμε δέσει μια σημειακή μάζα m=2kg, όπως στο σχήμα, δημιουργώντας έτσι ένα στερεό S. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του στερεού S, ως προς τους άξονες:

i) y_1, ο οποίος είναι κάθετος στη ράβδο και περνά από το μέσον της Μ.

ii) παράλληλον άξονα y_2 που περνά από το άκρο Α.

iii) παράλληλον άξονα y_3 που περνά από το άκρο Β.

iv) Η ελάχιστη ροπή αδράνειας που μπορεί να εμφανίσει το στερεό ως προς άξονα y παράλληλο προς τους παραπάνω άξονες.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I = \frac{1}{12} m\ell^2$.

Απάντηση:

i) Η ροπή αδράνειας του στερεού S είναι το άθροισμα $I=\Sigma m_i R_i^2$, που σημαίνει:

$$I = mR_1^2 + (m_1' r_1^2 + m_2' r_2^2 + \ldots m_\nu r_\nu^2)$$

Όπου η παρένθεση αναφέρεται στη ροπή αδράνειας της ράβδου, η οποία μας έχει δοθεί ότι είναι ίση με $I = \frac{1}{12} m\ell^2$. Έτσι έχουμε:

$$I_{y_1} = m_1 R_1^2 + \frac{1}{12} M\ell^2 = 2 \cdot 1^2 kgm^2 + \frac{1}{12} 2 \cdot 2^2 kgm^2 = \frac{8}{3} kgm^2.$$

ii) Για τον άξονα y_2 θα έχουμε:

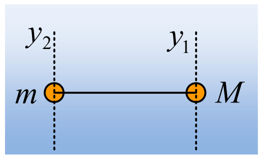
$$I_{y_2} = m_1 R_1^2 + I_{\rho/A} \quad (1)$$

Όπου από το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων έχουμε:

$$I_{\rho/A} = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{12} M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M\ell^2$$

Έτσι με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

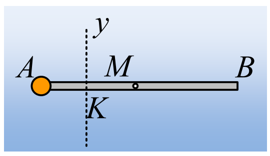
$$I_{y_2} = m_1 R_1^2 + \frac{1}{3} M\ell^2 = 2 \cdot 0^2 + \frac{1}{3} 2 \cdot 2^2 kgm^2 = \frac{8}{3} kgm^2.$$



Μπορούμε να διαπιστώσουμε την ισότητα των δύο παραπάνω ροπών αδράνειας; Περίεργο; Αν θυμηθούμε ότι το κέντρο μάζας είναι το σημείο στο οποίο θεωρούμε συγκεντρωμένη τη μάζα του στερεού, μήπως η κατάσταση είναι όμοια με το να είχαμε δυο υλικά σημεία σε απόσταση 1m; Αλλά τότε η ροπή αδράνειας ως προς τους άξονες y_1 και y_2 δεν θα ήταν η ίδια, αφού m=M;

iii) Με τον ίδιο τρόπο όπως προηγούμενα θα έχουμε:

$$I_{y_3} = m_1 R_1^2 + \frac{1}{3} M\ell^2 = 2 \cdot 2^2 kgm^2 + \frac{1}{3} 2 \cdot 2^2 kgm^2 = \frac{32}{3} kgm^2.$$



iv) Το στερεό από όλους τους παραπάνω παράλληλους άξονες, θα παρουσιάζει τη μικρότερη ροπή αδράνειας, ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας. Γιατί; Γιατί αυτό επιβάλει το θεώρημα του Steiner: $I = I_{cm} + Md^2$. Η ελάχιστη ροπή αδράνειας θα είναι στην περίπτωση που d=0!

Αλλά αν φανταστούμε, με βάση το προηγούμενο σχόλιο, το στερεό ως ένα σύστημα δύο σημειακών μαζών, το κέντρο μάζας του, θα είναι ένα σημείο Κ, στο μέσον της ΑΜ. Έτσι θα έχουμε:

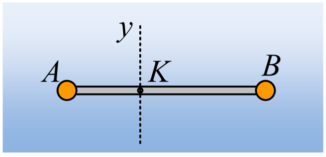
$$I_{cm/s} = I_K = m(AK)^2 + I_{\rho/K}$$

Όπου για τη ράβδο:

$$I_{\rho/K} = I_{cm} + Md^2 = \frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{7}{48}M\ell^2 \rightarrow$$

$$I_{cm/s} = m(AK)^2 + \frac{7}{48}M\ell^2 = 2\cdot 0{,}5^2\,kgm^2 + \frac{7}{48}2\cdot 2^2\,kgm^2 = \frac{5}{3}kgm^2 .$$

Άσκηση 3η:



Στα άκρα Α και Β μιας ομογενούς ράβδου μάζας Μ και μήκους l=2m έχουμε δέσει δύο σημειακές μάζες m_1 και m_2=2kg, αντίστοιχα, όπως στο σχήμα, δημιουργώντας έτσι ένα στερεό S. Η ροπή αδράνειας του στερεού S ως προς τον άξονα y, ο οποίος είναι κάθετος τη ράβδο, περνώντας από το σημείο Κ, είναι I=4kgm^2. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του στερεού S_1 που θα προκύψει αν αφαιρεθεί η μάζα m_2, ως προς τον ίδιο άξονα y.

Απάντηση:

Η ροπή αδράνειας του στερεού S ως προς άξονα y είναι ίση με το άθροισμα:

$$I_{y_{/s}} = m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I_{\rho/K}$$

Όπου R_1, R_2 οι αποστάσεις των σημειακών μαζών από το Κ και $I_{\rho/K}$ η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα στο Κ. Αλλά τότε αντίστοιχα η ροπή αδράνειας του στερεού S_1 θα είναι:

$$I_{y_{/s_1}} = m_1R_1^2 + I_{\rho/K} = I_{y_{/s}} - m_2R_2^2 = 10kgm^2 - 2\cdot 1^2\,kgm^2 = 8kgm^2 .$$

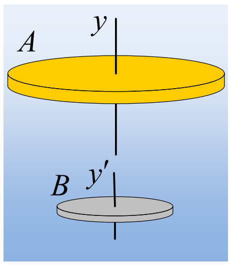
Συμπέρασμα:

Το στερεό S μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από το στερεό S_1 και τη σημειακή μάζα m_2. Αλλά τότε θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$I_{y_{/s}} = I_{y_{/s_1}} + I_{y_{/m_2}} \rightarrow$$

$$I_{y_{/s_1}} = I_{y_{/s}} - I_{y_{/m2}}$$

Άσκηση 4η:

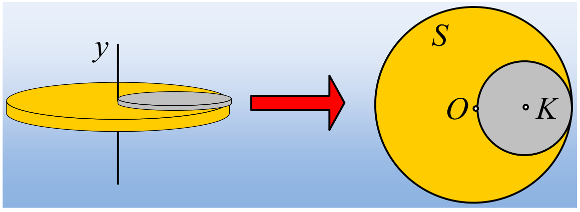


Ένας ομογενής δίσκος Α ακτίνας R=1m και μάζας M=8kg μπορεί να στρέφεται ως προς κατακόρυφο άξονα z που διέρχεται από το κέντρο του Ο, όπως στο σχήμα.

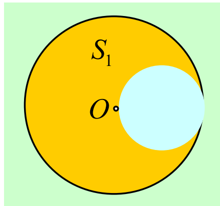
i) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον παραπάνω άξονα.

ii) Ένας δεύτερος δίσκος Β του ίδιου πάχους και από το ίδιο υλικό, έχει ακτίνα r=0,5m. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του δίσκου Β ως προς κάθετο άξονα y΄ που περνά από το κέντρο του Κ.

iii) Τοποθετούμε το δίσκο Β πάνω στον Α, όπως στο σχήμα και συγκολλώντας τον, δημιουργούμε το στερεό S. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του στερεού S, ως προς τον άξονα y.



iv) Από τον αρχικό δίσκο Α, αφαιρούμε ένα τμήμα του, κυκλικού σχήματος, ακτίνας r=0,5m, οπότε απομένει το υπόλοιπο τμήμα του, όπως στο σχήμα, ας το ονομάσουμε S_1. Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του στερεού S_1 ως προς τον άξονα y.



Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός δίσκου, ως προς κάθετο άξονα που περνάει από το κέντρο του $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Απάντηση:

i) Η ροπή αδράνειας του δίσκου Α ως προς τον άξονα y θα είναι:

$$I_A = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}8 \cdot 1^2 kgm^2 = 4kgm^2.$$

ii) Με τον ίδιο τρόπο η ροπή αδράνειας του Β, ως προς τον άξονα y΄ είναι:

$$I_B = \frac{1}{2}mr^2$$

Αλλά αν x το πάχος των δίσκων, τότε η μάζα του Α δίσκου είναι:

$$M = \rho V = \rho \cdot (\pi R^2 x)$$

Ενώ η αντίστοιχη του Β δίσκου:

$$m = \rho V = \rho \cdot (\pi r^2 x)$$

Με διαίρεση των παραπάνω σχέσεων κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{m}{M} = \frac{\rho \cdot (\pi r^2 x)}{\rho \cdot (\pi R^2 x)} = \frac{r^2}{R^2} \rightarrow m = M\frac{r^2}{R^2} = 8kg\frac{0,5^2}{1^2} = 2kg.$$

Οπότε η ζητούμενη ροπή αδράνειας είναι:

$$I_B = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}2 \cdot 0,5^2 kgm^2 = 0,25kgm^2.$$

iii) Για το στερεό S έχουμε:

$$I_{s/y} = I_{A/y} + I_{B/y} = I_A + \left(I_B + mr^2\right) = 4kgm^2 + (0,25 + 2 \cdot 0,5^2)kgm^2 = 4,75kgm^2.$$

iv) Το τμήμα που αφαιρούμε, είναι ένας δίσκος ίδιος με τον Β! Αλλά τότε για τον αρχικό δίσκο Α, θα μπορούσαμε να γράψουμε:

$$I_{A/y} = I_{s1/y} + I_{B/y}$$

Όπου $I_{B/y} = I_B + mr^2 = (0{,}25 + 2 \cdot 0{,}5^2)kgm^2 = 0{,}75kgm^2$. Οπότε:

$$I_{s1/y} = I_{A/y} - I_{B/y} = 4kgm^2 - 0{,}75kgm^2 = 3{,}25kgm^2.$$

dmargaris@gmail.com