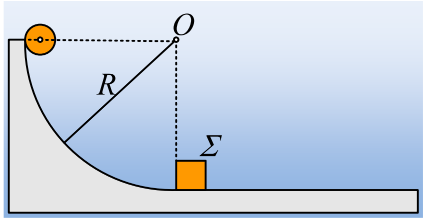
Μια ελαστική κρούση δύο στερεών.



Από την κορυφή ενός κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου, ακτίνας R=2m αφήνεται να κινηθεί μια σφαίρα μάζας m_1=1kg. Η σφαίρα αρχικά ολισθαίνει για λίγο, ενώ στη συνέχεια κυλίεται και φτάνοντας στη βάση του επιπέδου, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με σώμα Σ, σχήματος κύβου, με ακμή α=2r, όπου r η ακτίνα της σφαίρας και μάζας m_2=1kg. Μετά την κρούση το σώμα Σ κινείται στο οριζόντιο επίπεδο και διανύει απόσταση x=5m, μέχρι να σταματήσει εξαιτίας της τριβής. Δίνεται ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος Σ και του επιπέδου μ=0,25, g=10m/s^2, ενώ στη διάρκεια της κρούσης δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ σφαίρας-κύβου. Εξάλλου η ροπή αδράνειας της σφαίρας είναι ίση με I= 2/5 mr^2.

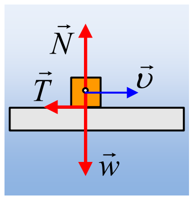
i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του Σ αμέσως μετά την κρούση.

ii) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια της σφαίρας, ελάχιστα πριν την κρούση.

iii) Να υπολογιστεί το ποσοστό της αρχικής δυναμικής ενέργειας της σφαίρας, το οποίο μετατρέπεται σε θερμική, κατά τη διάρκεια της ολίσθησής της στο τεταρτοκύκλιο. Θεωρείστε μηδενική τη δυναμική της ενέργεια, ελάχιστα πριν την κρούση και ότι r<<<R.

iv) Να εξετάστε αν θα υπάρξει δεύτερη κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο. Εφαρμόζοντας γι' αυτόν, το Θ.Μ.Κ.Ε. στη διάρκεια της κίνησής του παίρνουμε:

$$K_{τελ}-K_{αρχ}=W_w+W_N+W_T \rightarrow$$

$$0-\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2=0+0-Tx \rightarrow \frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2=\mu mgx$$

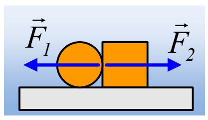
$$\upsilon_2'=\sqrt{2\mu gx}=\sqrt{2\cdot 0,25\cdot 10\cdot 5}m/s=5m/s$$

ii) Για την ελαστική κρούση μεταξύ σφαίρας και κύβου, ισχύουν:

Από Α.Δ.Ο. $\vec{P}_{πριν}=\vec{P}_{μετ} \rightarrow m_1\upsilon_1=m_1\upsilon_1'+m_2\upsilon_2'$ (1)

Από διατήρηση της κινητικής ενέργειας: $K_{πριν}=K_{μετά} \rightarrow$

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2+\cancel{\frac{1}{2}I\omega_1^2}=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2+\cancel{\frac{1}{2}I\omega_2^2}+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2$$



Αλλά στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που το ένα σώμα ασκεί στο άλλο, στη διάρκεια της κρούσης. Οπότε η δύναμη F_1 είναι οριζόντια και περνά από το κέντρο της σφαίρας, συνεπώς δεν έχει ροπή, ως προς τον άξονα περιστροφής και η γωνιακή ταχύτητα δεν αλλάζει. Έτσι η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon_1'^2+\frac{1}{2}m_2\upsilon_2'^2 \quad (2)$$

Όμως οι εξισώσεις (1) και (2) είναι οι γνωστές μας εξισώσεις της ελαστικής κρούσης, οπότε:

$$\upsilon_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = 0 \text{ και } \upsilon_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1 = \upsilon_1$$

Πράγμα που σημαίνει ότι η σφαίρα πριν την κρούση είχε ταχύτητα κέντρου μάζας $\upsilon_{cm}=\upsilon_1=5m/s$.

Αλλά αφού κυλίεται θα στρέφεται και με γωνιακή ταχύτητα, για την οποία θα ισχύει η σχέση $\upsilon_{cm}=\omega r$.

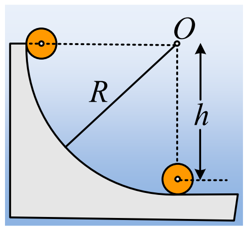
Οπότε η κινητική της ενέργεια ελάχιστα πριν την κρούση ήταν:

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_1^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}m_1 r^2\omega_1^2 = \frac{7}{10}m_1\upsilon_1^2 \rightarrow$$

$$K_1 = \frac{7}{10}m_1\upsilon_1^2 = \frac{7}{10}1\cdot 5^2 J = 17{,}5J$$

iii) Θεωρώντας ότι στην θέση ελάχιστα πριν την κρούση, η δυναμική ενέργεια της σφαίρας είναι μηδενική, από τη διατήρηση της ενέργειας, ανάμεσα στην αρχική θέση που αφήνεται να κινηθεί και τη θέση πριν την κρούση, έχουμε:

$$\cancel{K_{αρχ}} + U_{αρχ} = K_{τελ} + \cancel{U_{τελ}} + Q$$

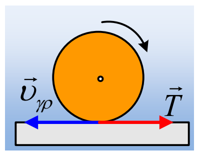


Όπου Q η μηχανική ενέργεια που μετετράπη σε θερμική εξαιτίας της τριβής ολίσθησης, για όσο χρόνο η σφαίρα ολισθαίνει. Ας σημειωθεί ότι r<<<R, οπότε $h=R-r\approx R$.

$$Q=U_{αρχ}-K_{τελ}=m_1 gR-K_1=1\cdot 10\cdot 2J-17{,}5J=2{,}5J$$

Οπότε το ζητούμενο ποσοστό θα είναι:

$$\pi = \frac{Q}{E_{αρχ}}100\% = \frac{Q}{U_{αρχ}}100\% = \frac{2{,}5J}{20J}100\% = 12{,}5\%$$



iv) Αμέσως μετά την κρούση η σφαίρα έχει γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = \upsilon_{cm}/r$, αλλά τότε το κατώτερο σημείο της, που έρχεται σε επαφή με το οριζόντιο επίπεδο, έχει γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{γρ}=\omega_1 r=\upsilon_1$, με αποτέλεσμα να δεχτεί δύναμη τριβή ολίσθησης, όπως στο διπλανό σχήμα. Εξαιτίας αυτής της δύναμης θα αποκτήσει επιτάχυνση προς τα δεξιά και θα κινηθεί ακολουθώντας το κύβο, αρχικά επιταχυνόμενη, μέχρι που να αρχίσει η κύλιση, οπότε θα κινηθεί πλέον με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας. Συνεπώς τα δυο σώματα κάποια στιγμή θα συγκρουστούν ξανά, αφού λάβουμε υπόψη μας ότι ο κύβος επιβραδύνεται και θα σταματήσει μετά από 5m.

Σχόλιο:

Μπορεί να διαπιστωθεί ότι, ανεξάρτητα του συντελεστή τριβής μεταξύ σφαίρας και επιπέδου, η $2^η$ σύγκρουση των σωμάτων, θα συμβεί μετά το μηδενισμό της ταχύτητας του κύβου.

Βέβαια το παραπάνω ερώτημα, δεν χρειάζεται παραπέρα διερεύνηση, αφού αρκεί να αποδείξουμε ότι η σφαίρα θα κινηθεί προς τα δεξιά ακολουθώντας τον κύβο. Υπενθυμίζεται ότι η σφαίρα αρχικά θα επιταχυνθεί και στη συνέχεια θα κυλίεται με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας.

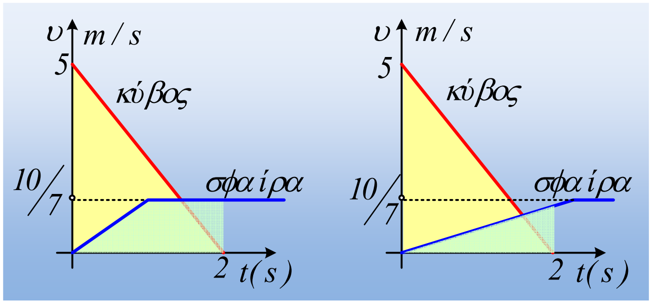
Αλλά ας το δούμε εν συντομία:

Ο κύβος δέχεται τριβή T=2,5N και επιβραδύνεται με α=2,5m/s^2, οπότε σταματά τη στιγμή $t_2 = \dfrac{\upsilon_2}{a_2} = 2s$.

Η σφαίρα δέχεται τριβή Τ (δεν δίνεται ο συντελεστής τριβής) οπότε αποκτά $\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}t=\dfrac{T}{m}t$, ενώ και $\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ οπότε $Tr= 2/5\ mr^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \dfrac{5T}{2mr}$. Αλλά τότε $\omega=\omega_0-\alpha_{\gamma\omega\nu}t$ ή $\omega r=\omega_0 r -\alpha_{\gamma\omega\nu}r\cdot t$ και η ολίσθηση σταματά όταν $\upsilon_{cm}=\omega r$ ή $\dfrac{T}{m}t = \upsilon_1 - \dfrac{5T}{2mr}rt \rightarrow t_1 = \dfrac{2\upsilon_1 m}{7T}$, ενώ έχει αποκτήσει τελική ταχύτητα:

$$\upsilon_\tau=\frac{T}{m}t_1 = \frac{2\upsilon_1}{7} = \frac{10}{7}m/s$$

Αλλά αν κάνουμε στο ίδιο διάγραμμα τη γραφική παράσταση υ-t, για τα δυο σώματα, θα έχουμε:



Το πρώτο, όταν $t_1 = \dfrac{2\upsilon_1 m}{7T} < 2s$ και το δεύτερο όταν $t_1 = \dfrac{2\upsilon_1 m}{7T} > 2s$. Αλλά και στις δύο περιπτώσεις η μετατόπιση του κύβου μέχρι να σταματήσει (t=2s), ίση αριθμητικά με το κίτρινο εμβαδόν, είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη μετατόπιση της σφαίρας (πρασινωπό εμβαδόν). Συνεπώς πρώτα σταματά ο κύβος και μετά έρχεται να πέσει πάνω του η σφαίρα.

dmargaris@gmail.com