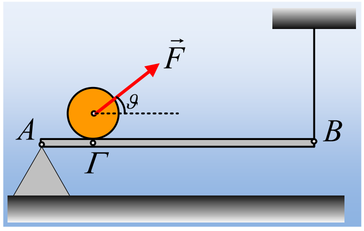
Μια κύλιση πριν την «καταστροφή»…



Μια ομογενής σανίδα ΑΒ μήκους 8m και βάρους 40Ν ισορροπεί οριζόντια, στηριζόμενη στο άκρο της Α σε τρίποδο και δεμένη στο άκρο της Β σε κατακόρυφο νήμα. Πάνω στη σανίδα, στο σημείο Γ, όπου (ΑΓ)=2m ηρεμεί ένας κύλινδρος μάζας 10kg, όπως στο διπλανό σχήμα. Σε μια στιγμή $t_0=0$ ασκείται στον άξονα του κυλίνδρου μια σταθερή δύναμη μέτρου F=50Ν, η οποία σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ, όπου ημθ=0,8, με αποτέλεσμα ο κύλινδρος να αρχίσει να κυλίεται προς το άκρο Β, ενώ το νήμα παραμένει κατακόρυφο.

i) Να αποδείξετε ότι μεταξύ του τρίποδου και της σανίδας αναπτύσσεται δύναμη τριβής.

ii) Αν τη χρονική στιγμή $t_1=2s$ το νήμα ξεπερνά το όριο θραύσεώς του, με αποτέλεσμα να κόβεται, να κάνετε τη γραφική παράσταση της τάσης του νήματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογίστε το όριο θραύσεως του νήματος.

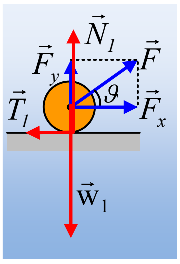
iii) Να υπολογίσετε τους ελάχιστους συντελεστές οριακής στατικής τριβής τόσο μεταξύ σανίδας και κυλίνδρου, όσο και μεταξύ της σανίδας και του τρίποδου για να μπορεί να υπάρξει η παραπάνω κύλιση του κυλίνδρου.

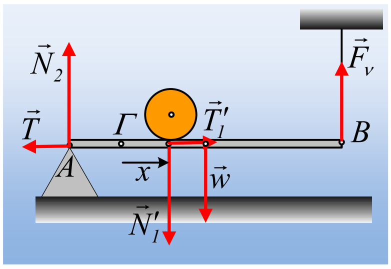
Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I= ½\ mR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

i) Αναλύοντας τη δύναμη F, την οποία δέχεται ο κύλινδρος, σε οριζόντια και κατακόρυφη διεύθυνση βρίσκουμε F_x=F·συνθ=50·0,6Ν=30Ν και F_y=F·ημθ=50·0,8Ν=40Ν. Αλλά ο κύλινδρος ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση οπότε:

$$\Sigma F_y=0 \rightarrow N_1+F_y=w_1 \rightarrow N_1=mg-F_y=10\cdot 10N-40N=60N.$$





Αλλά για να κυλίεται ο κύλινδρος, θα πρέπει να δεχτεί κάποια δεξιόστροφη ροπή και η μόνη δύναμη που μπορεί να την προκαλέσει είναι η τριβή T_1 στο πρώτο σχήμα. Αλλά τότε η αντίδρασή της T_1' ασκείται στη σανίδα, με φορά προς τα δεξιά. Αλλά για να παραμένει κατακόρυφο το νήμα, σημαίνει ότι η σανίδα ισορροπεί, οπότε $\Sigma F_x=0$, κατά συνέπεια θα πρέπει να ασκείται και κάποια άλλη οριζόντια δύναμη πάνω της. Αυτή δεν μπορεί να είναι άλλη, από τη δύναμη στατικής τριβής που δέχεται από το τρίποδο, την $\vec{T}$ στο δεύτερο σχήμα.

ii) Ερχόμαστε στην κύλιση του κυλίνδρου, την οποία θεωρούμε σύνθετη κίνηση, από όπου:

Μεταφορική κίνηση: $\Sigma F_x=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F_x-T_1=m\cdot\alpha_{cm}$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1\cdot R = ½\, mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1 = ½\, mR\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

Αλλά αφού κυλίεται $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}R$ (3), οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) με τη βοήθεια της (3) παίρνουμε:

$$F_x = \frac{3}{2}ma_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{2F_x}{3m} = \frac{2\cdot 30N}{3\cdot 10kg} = 2m/s^2$$

Αλλά τότε η κίνηση του άξονα του κυλίνδρου είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη και τη χρονική στιγμή t, ο κύλινδρος απέχει από το σημείο Γ, απόσταση $x= ½\, \alpha_{cm}\cdot t^2$, όπως στο 2^o σχήμα. Εξάλλου

$$T_1 = ½\, m\cdot\alpha_{cm} = ½\, 10\cdot 2N = 10N.$$

Τη στιγμή αυτή η σανίδα ισορροπεί, οπότε:

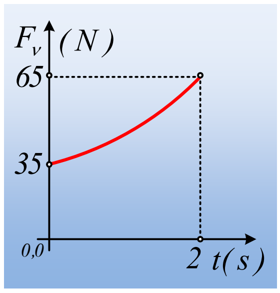
$$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x=0 \rightarrow T=T_1'=T_1=10N \\ \Sigma F_y=0 \rightarrow N_2+F_\nu= w+N_1' \rightarrow N_2+F_\nu= 40N+60N \rightarrow N_2+F_\nu=100N \text{ (4)} \end{cases}$$

$$\text{Και } \Sigma\tau_A=0 \rightarrow F_\nu\ell - w\frac{\ell}{2} - N_1'(A\Gamma + x) = 0 \rightarrow$$

$$F_\nu\cdot 8 - 40\cdot 4 - 60(2+x) = 0 \rightarrow$$

$$F_\nu = 35 + 7{,}5x \text{ ή}$$

$$F_\nu = 35 + 7{,}5\cdot\frac{1}{2}2\cdot t^2 = 35 + 7{,}5\cdot t^2 \quad \text{(μονάδες στο S.I.)}$$



Με αντικατάσταση t=2s, παίρνουμε τη μέγιστη τιμή της τάσης, το όριο θραύσεως:

$$F_{\nu/\theta\rho} = (35 + 7{,}5\cdot 2^2)N = 65N$$

Ενώ η ζητούμενη γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.

iii) Για να μην ολισθαίνει ο κύλινδρος πρέπει η ασκούμενη τριβή να είναι στατική, συνεπώς:

$$T_1 \le T_{o\rho} \rightarrow T_1 \le \mu_1 N_1 \rightarrow \mu_1 \ge \frac{T_1}{N_1} \rightarrow$$

$$\mu_{1\min} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

Όπου μ_{1min} ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και σανίδας.

Εξάλλου από την σχέση (4) παίρνουμε:

$$N_2 = 100 - F_\nu = 65 - 7{,}5\cdot t^2 \text{ (S.I.)}$$

Βλέπουμε ότι η κάθετη αντίδραση από το τρίποδο μειώνεται καθώς ο κύλινδρος μετακινείται προς τα δεξιά. Για να μην ολισθήσει λοιπόν η σανίδα, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε την ισορροπία για τη θέση που κόβεται το νήμα, όπου θα έχουμε την ελάχιστη N_2, συνεπώς θα πρέπει να έχουμε μεγαλύτερο συντελεστή οριακής στατικής τριβής.

Αλλά στη θέση αυτή έχουμε:

$$N_2 = (65 - 7{,}5 \cdot 2^2)N = 35N\,.$$

Αλλά και πάλι:

$$T \le T_{o\rho} \rightarrow T \le \mu N_2 \rightarrow \mu \ge \frac{T}{N_2} \rightarrow$$

$$\mu_{min} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

dmargaris@gmail.com