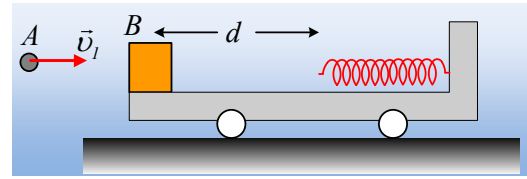


Μια παραλλαγή σε μια γνωστή περίπτωση.

Το αμαξίδιο του διπλανού σχήματος μάζας $M=1\text{kg}$ ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, έχοντας πάνω του το σώμα B μάζας $m_2=0,95\text{kg}$, απέχοντας κατά $d=0,5\text{m}$ από το άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=200\text{N/m}$ και μήκους $0,4\text{m}$. Ένα βλήμα A μάζας $m_1=50\text{g}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_1=40\text{m/s}$ κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και σφηνώνεται στο σώμα B, τη στιγμή $t_0=0$. Αν δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ συσσωματώματος και αμαξιδίου, να βρεθούν:



Αν δεν αναπτύσσεται τριβή μεταξύ συσσωματώματος και αμαξιδίου, να βρεθούν:

- i) Η ταχύτητα του συσσωματώματος A-B αμέσως μετά την κρούση.
- ii) Το ελάχιστο μήκος που θα αποκτήσει κάποια στιγμή t_1 το ελατήριο.
- iii) Το έργο της δύναμης του ελατηρίου που ασκείται στο συσσωμάτωμα, από τη στιγμή t_0 έως τη στιγμή t_1 .
- iv) Κάποια επόμενη στιγμή t_2 το ελατήριο αποκτά ξανά το φυσικό μήκος του. Ποια ταχύτητα θα έχει το αμαξίδιο τη στιγμή αυτή;
- v) Πόσο χρόνο μετά τη στιγμή t_2 το συσσωμάτωμα θα εγκαταλείψει το αμαξίδιο;

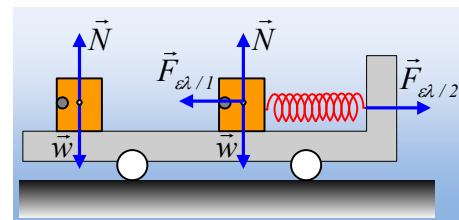
Απάντηση:

- i) Για την πλαστική κρούση των σωμάτων A και B ισχύει:

$$\vec{p}_{\pi\rho} = \vec{p}_{\mu\epsilon\tau} \rightarrow$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \rightarrow V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{0,05 \cdot 40}{0,05 + 0,95} \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}$$

- ii) Το συσσωμάτωμα διανύει την απόσταση d , χωρίς να κινηθεί το αμαξίδιο, αφού δεν ασκείται καμιά οριζόντια δύναμη πάνω του. Μόλις όμως αρχίζει να συμπιέζεται το ελατήριο, τότε δέχεται δύναμη από το ελατήριο, τόσο το συσσωμάτωμα, όσο και το αμαξίδιο. Αποτέλεσμα το συσσωμάτωμα να επιβραδύνεται, ενώ το αμαξίδιο να επιταχύνεται. Για όσο χρόνο η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του αμαξιδίου, το μήκος του ελατηρίου μειώνεται, ενώ αντίθετα αν $v_{\text{αμ}} > v_{\text{συσ}}$ το ελατήριο αποσυμπιέζεται. Κατά συνέπεια το ελατήριο έχει το ελάχιστο μήκος του, τη στιγμή t_1 που τα σώματα έχουν την ίδια ταχύτητα, έστω V_κ .



Το σύστημα των σωμάτων συσσωμάτωμα – αμαξίδιο - ελατήριο είναι μονωμένο οπότε από τη διατήρηση της ορμής έχουμε, για τις στιγμές t_0 και t_1 :

$$\vec{p}_{t_0} = \vec{p}_{t_1} \rightarrow$$

$$(m_1 + m_2) V = (m_1 + m_2 + M) V_\kappa \rightarrow V_\kappa = \frac{(m_1 + m_2) V}{m_1 + m_2 + M} = \frac{1 \cdot 2}{0,05 + 0,95 + 1} \text{ m/s} = 1 \text{ m/s}$$

Μεταξύ των παραπάνω στιγμών, οι μόνες δυνάμεις που παράγουν έργο πάνω στα σώματα, είναι η δύναμη του ελατηρίου ($F_{ελ1}$ στο συσσωμάτωμα και $F_{ελ2}$ στο αμαξίδιο), δυνάμεις συντηρητικές, οπότε η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται:

$$K_{t_0} + U_{t_0} = K_{t_1} + U_{t_1} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + M)V_{\kappa}^2 + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 \rightarrow$$

$$(\Delta\ell) = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)V^2 - (m_1 + m_2 + M)V_{\kappa}^2}{k}} \rightarrow$$

$$(\Delta\ell) = \sqrt{\frac{1 \cdot 2^2 - 2 \cdot 1^2}{200}} m = 0,1m$$

Αλλά τότε $\ell_{min} = \ell_o - (\Delta\ell) = 0,4m - 0,1m = 0,3m$.

- iii) Εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Κ.Ε. για το συσσωμάτωμα ανάμεσα στις θέσεις, αμέσως μετά την κρούση και της θέσης που βρίσκεται τη στιγμή t_1 παίρνουμε:

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w + W_N + W_{F_{ελ1}} \rightarrow$$

$$W_{F_{ελ1}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{\kappa}^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}1 \cdot 1^2 J - \frac{1}{2}1 \cdot 2^2 J = -1,5J$$

- iv) Μεταξύ των χρονικών στιγμών t_0 αμέσως μετά την κρούση και της στιγμής t_2 που το ελατήριο αποκτά ξανά το φυσικό μήκος του, ισχύουν:

$$\text{Α.Δ.Ο.: } \vec{p}_{t_0} = \vec{p}_{t_2} \rightarrow$$

$$(m_1 + m_2)V = (m_1 + m_2)V_1 + MV_2 \quad (1)$$

$$\text{Α. Δ.Μ.Ε.: } K_{t_0} + U_{t_0} = K_{t_2} + U_{t_2} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2 \quad (2)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) είναι το σύστημα των εξισώσεων που εμφανίζεται κατά την κεντρική ελαστική κρούση δύο υλικών σημείων, συνεπώς οι ταχύτητες δίνονται από τις γνωστές εξισώσεις:

$$V_1 = \frac{(m_1 + m_2) - M}{m_1 + m_2 + M}V \rightarrow V_1 = \frac{1-1}{2}2m/s = 0m/s$$

$$V_2 = \frac{2(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + M}V \rightarrow V_2 = \frac{2 \cdot 1}{2}2m/s = 2m/s$$

- v) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα, μόλις το ελατήριο αποκτήσει το φυσικό μήκος του, το συσσωμάτωμα παραμένει ακίνητο, ενώ το αμαξίδιο έχει ταχύτητα 2m/s. Αλλά τότε μόλις το αμαξίδιο μετακινηθεί κατά 0,5m, το συσσωμάτωμα θα πέσει στο έδαφος. Οπότε:

$$\Delta x_2 = V_2 \cdot \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x_2}{V_2} = \frac{d}{V_2} = \frac{0,5m}{2m/s} = 0,25s$$

dmargaris@gmail.com