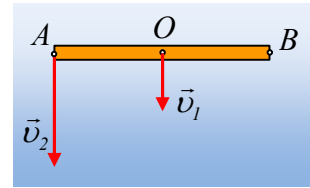


Μια ράβδος πέφτει κατακόρυφα.

Μια ομογενής ράβδος AB μήκους $l=2\text{m}$ πέφτει κατακόρυφα με την επίδραση μόνο του βάρους. Σε μια στιγμή, η ράβδος είναι οριζόντια και το μέσον της O έχει κατακόρυφη ταχύτητα $v_1=4\text{m/s}$, ενώ το άκρο της A, επίσης κατακόρυφη ταχύτητα $v_2=8\text{m/s}$, όπως στο διπλανό σχήμα.



i) Η κίνηση της ράβδου είναι:

- α) μεταφορική,
- β) στροφική,
- γ) σύνθετη.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Να βρεθεί η ταχύτητα του άκρου B στην θέση αυτή.

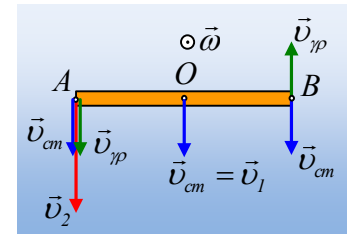
iii) Να βρεθεί η επιτάχυνση του άκρου A, λαμβάνοντας υπόψη σας, ότι η δοκός δεν έχει γωνιακή επιτάχυνση.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{m/s}^2$.

Απάντηση:

i) Αν η κίνηση ήταν μόνο μεταφορική τα σημεία A και O θα είχαν την ίδια ταχύτητα, πράγμα που δεν συμβαίνει. Έστω ότι η κίνηση ήταν μόνο στροφική. Αλλά τότε έχουμε ένα ελεύθερο στερεό (δεν υπάρχει κάποιος σταθερός άξονας) και η περιστροφή θα ήταν γύρω από νοητό άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας που περνά από το κέντρο μάζας O της ράβδου, το οποίο πρέπει να παραμένει ακίνητο. Ούτε αυτό συμβαίνει, συνεπώς η κίνηση είναι σύνθετη.*

ii) Θεωρούμε την σύνθετη κίνηση ως αποτελούμενη από μια μεταφορική με ταχύτητα ίση με αυτή του κέντρου μάζας O, $v_{cm}=v_1=4\text{m/s}$ και μια στροφική γύρω από νοητό άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας που περνά από το κέντρο μάζας O της ράβδου με γωνιακή ταχύτητα ω . Αλλά τότε το άκρο A έχει μια συνιστώσα ταχύτητας ίση με v_{cm} και μια γραμμική λόγω κυκλικής κίνησης $v_{\gamma\pi}=\omega R=\omega \frac{\ell}{2}$ όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά

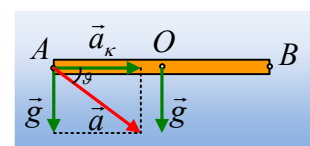


τότε:

$$v_2 = v_{cm} + \omega \frac{\ell}{2} \rightarrow \omega = \frac{2(v_2 - v_1)}{\ell} = \frac{2(8 - 4)}{2} \text{rad/s} = 4 \text{rad/s}$$

Αλλά τότε το άκρο B έχει ταχύτητα $v_B = v_{cm} - \omega \frac{\ell}{2} = 0$.

iii) Από τη στιγμή που μελετάμε την κίνηση ως σύνθετη, το σημείο A έχει μια επιτάχυνση εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης, ίση με την επιτάχυνση της βαρύτητας $a_{cm}=g$ και μια επιτάχυνση εξαιτίας της κυκλικής κίνησης που



συμμετέχει, την κεντρομόλο επιτάχυνση $a_k = \frac{v^2}{R}$ όπου $v = v_{\gamma\rho} = \omega R$ η γραμμική του ταχύτητα.

$$a_k = \omega^2 \frac{\ell}{2} = 4^2 \cdot 1m / s^2 = 16m / s^2$$

Αλλά τότε το άκρο A έχει συνολική επιτάχυνση μέτρου:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{16^2 + 10^2} m / s^2 = \sqrt{356} m / s^2 \approx 18,9m / s^2.$$

Η οποία σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ , όπου

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{g}{a_k} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

Σχόλιο* μόνο για καθηγητές:

Το άκρο B έχει μηδενική ταχύτητα, συνεπώς θα μπορούσε να θεωρηθεί η κίνηση της ράβδου μόνο στροφική, γύρω από στιγμιαίο άξονα περιστροφής, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας ο οποίος περνά από το άκρο B.

Πράγματι τότε η ταχύτητα του μέσου O θα ήταν $v_{cm} = \omega \cdot \frac{\ell}{2}$, ενώ του άκρου A $v_A = \omega \cdot \ell$. Μια χαρά!

Ας έρθουμε τώρα στις επιταχύνσεις.

Για το άκρο A:

Η επιτάχυνση $a_y = g$ είναι παράλληλη με την ταχύτητα, συνεπώς είναι επιτρόχια επιτάχυνση, υπεύθυνη για την μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας. Ενώ η $a_x = a_k = 16m/s^2$ είναι κάθετη στην ταχύτητα, συνεπώς είναι και στην περίπτωση αυτή, κεντρομόλος επιτάχυνση. Έτσι θα ισχύει:

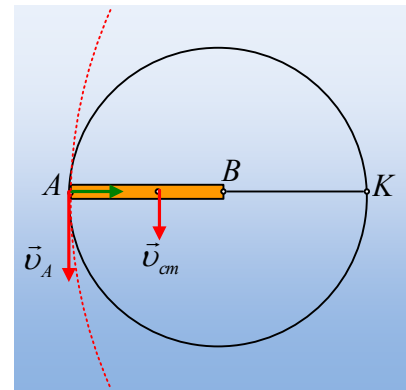
$$a_k = \frac{v_A^2}{R} \rightarrow R = \frac{v_A^2}{a_k} = \frac{8^2}{16} m = 4m$$

Τι βρήκαμε; Η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς που διαγράφει το άκρο A δεν είναι όσο και η ακτίνα της υποτιθέμενης κυκλικής τροχιάς με κέντρο το B, αλλά διπλάσια! Η τροχιά δηλαδή του άκρου A προσεγγίζεται από έναν κύκλο με κέντρο το σημείο K, όπου $(AK) = 4m = 2\ell$.

Τα πράγματα, όμως γίνονται ακόμη «χειρότερα» αν επικεντρωθούμε στο μέσον O της ράβδου. Τι επιτάχυνση έχει; Μα μόνο κατακόρυφη $a_y = g$, συνεπώς επιτρόχια!!! Δεν υπάρχει κεντρομόλος επιτάχυνση για την υποτιθέμενη κίνηση γύρω από το B!!!

Τι σημαίνει αυτό; Ότι η τροχιά του O δεν παρουσιάζει καμπυλότητα, πράγμα που είναι σωστό, αφού αρκεί να σκεφτούμε ότι το O κινείται ευθύγραμμα.

Συμπέρασμα: Νομίζω ότι πρέπει να αποφευχθεί κάθε αναφορά σε στιγμιαίο άξονα περιστροφής, αφού δημιουργεί τρομερά προβλήματα που ένας μαθητής δεν μπορεί να επιλύσει.



dmargaris@gmail.com