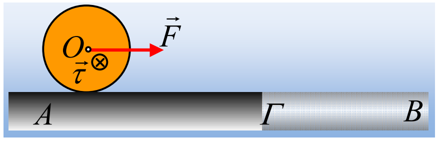
Μια ροπή και μια δύναμη επιταχύνουν.



Ένας τροχός μάζας Μ και ακτίνας R=0,5m ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο Α. Σε μια στιγμή δέχεται μέσω του άξονα μια σταθερή ροπή μέτρου τ=1,5N·m και μια σταθερή οριζόντια δύναμη στον άξονά του F=4N, όπως στο σχήμα. Μετά από λίγο, αφού μετακινηθεί κατά x=8m, περνάει σε Β επίπεδο, το οποίο παρουσιάζει με τον τροχό συντελεστή τριβής μ=0,2, στη θέση Γ.

i) Να υπολογιστεί η ενέργεια που μεταφέρεται στον τροχό μέσω της ασκούμενης ροπής, μέχρι τη θέση Γ.

ii) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια του τροχού στη θέση Γ.

iii) Αν η μάζα του τροχού είναι ίση με 4kg, για τη χρονική στιγμή ελάχιστα πριν περάσει ο τροχός στο Β επίπεδο, να βρεθούν:

α) Η ισχύς της δύναμης F και ο ρυθμός μεταβολής της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του τροχού.

β) Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού, ως προς τον άξονά του.

iv) Για τη στιγμή, αμέσως μόλις περάσει ο τροχός στο Β επίπεδο να υπολογιστούν:

α) Ο ρυθμός μεταβολής της μεταφορικής κινητικής ενέργειας του τροχού.

β) Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας λόγω περιστροφής.

γ) Ο ρυθμός με τον οποίο μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της τριβής.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του $I= ½\ mR^2$ και $g=10m/s^2$.

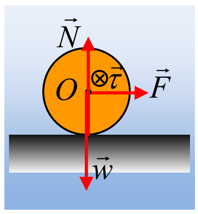
Απάντηση:

i) Η ενέργεια που μεταφέρεται στον τροχό μέσω του έργου της δύναμης, είναι ίση:

$$W_F=F\cdot x_{cm}=4\cdot 8J=32J.$$

Αντίστοιχα η ενέργεια που μεταφέρεται μέσω της ασκούμενης ροπής είναι:

$$W_\tau=\tau\cdot\theta$$



Αλλά θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$\Sigma F_x=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F=m\cdot\alpha_{cm}\ \ (1) \text{ και}$$

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \tau= ½\ mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\ \ (2)$$

Αλλά τότε, η μεταφορική κίνηση είναι ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, για την οποία ισχύει $x= ½\ \alpha_{cm}\cdot t^2$, ενώ η περιστροφική κίνηση είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη, όπου κατ' αντιστοιχία θα ισχύει $\theta= ½\ \alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2$. Με διαίρεση των δύο αυτών εξισώσεων κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (1) και (2), παίρνουμε:

$$\frac{x}{\vartheta}=\frac{a_{cm}}{a_{\gamma\omega\nu}}=\frac{\frac{F}{m}}{\frac{2\tau}{mR^2}}=\frac{FR^2}{2\tau}\to \vartheta = x\frac{2\tau}{FR^2}=8\frac{2\cdot 1{,}5}{4\cdot 0{,}5^2}rad=24rad$$

Αλλά τότε $W_\tau=\tau\cdot\theta=1{,}5\cdot 24J=36J$.

ii) Εφαρμόζουμε για τον τροχό το Θ.Μ.Κ.Ε. για το διάστημα που κινείται στο Α επίπεδο:

$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_F+W_w+W_N+W_\tau \to$$

$$K_\Gamma=W_F+W_\tau=32J+36J=68J.$$

iii) Αν προσέξουμε τις εξισώσεις (1) και (2) θα δούμε ότι η μεταφορική κίνηση καθορίζεται αποκλειστικά από τη δύναμη F, ενώ η περιστροφική από τη ροπή τ. Αλλά τότε το έργο της δύναμης εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς, ενώ αντίστοιχα το έργο της ροπής, ως περιστροφική κινητική ενέργεια. Δηλαδή:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2=W_F\to \upsilon_{cm}=\sqrt{\frac{2W_F}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 32}{4}}m/s=4m/s$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2=W_\tau\to \omega=\sqrt{\frac{4W_\tau}{mR^2}}=\sqrt{\frac{4\cdot 36}{4\cdot 0{,}5^2}}rad/s=12rad/s$$

(προφανώς στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν εφαρμόζαμε το Θ.Μ.Κ.Ε. για κάθε μια κίνηση χωριστά).

α) Με βάση τις παραπάνω τιμές:

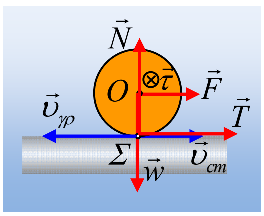
$$P_F=F\cdot\upsilon_{cm}=4\cdot 4W=16W \text{ και } \frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt}=\frac{dW_{F o\lambda}}{dt}=P_F=16J/s$$

β) $$\frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt}=\frac{dW_\tau}{dt}=\tau\cdot\omega=1{,}5\cdot 12J/s=18J/s$$

γ) $$\frac{dL_o}{dt}=\Sigma\tau=\tau=1{,}5kgm^2/s^2.$$

Κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα, ίδιας κατεύθυνσης με την ροπή.

iv) Μόλις ο τροχός περάσει στο Β επίπεδο θα δεχτεί δύναμη τριβής. Τι τριβή θα είναι αυτή και ποια η κατεύθυνσή της; Εστιάζουμε στο κατώτερο σημείο του τροχού Σ, σημείο με το οποίο έρχεται σε επαφή με το επίπεδο. Το σημείο Σ, έχει ταχύτητα ίση με υ_{cm}, λόγω της μεταφορικής κίνησης και $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R$, εξαιτίας της κυκλικής του κίνησης γύρω από το κέντρο Ο. Αλλά τότε $\upsilon_\Sigma=\upsilon_{cm}-\omega R=4m/s-12\cdot 0{,}5m/s=-2m/s$, δηλαδή το σημείο Σ έχει ταχύτητα προς τα αριστερά, οπότε ο τροχός θα δεχτεί δύναμη **τριβής ολίσθησης** με φορά προς τα δεξιά, όπως στο διπλανό σχήμα, μέτρου:



$$T=\mu N=\mu mg=0{,}2\cdot 4\cdot 10N=8N$$

α) Με βάση τις παραπάνω τιμές:

$$\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt}=\frac{dW_{F o\lambda}}{dt}=\frac{(F+T)\cdot dx}{dt}=(F+T)\cdot\upsilon_{cm}\rightarrow$$

$$\frac{dK_{\mu\varepsilon\tau}}{dt}=(F+T)\cdot\upsilon_{cm}=(4+8)\cdot 4J/s=48J/s.$$

β) $$\frac{dK_{\pi\varepsilon\rho}}{dt}=\frac{dW_{\Sigma\tau}}{dt}=\tau\cdot\omega-TR\cdot\omega=1{,}5\cdot 12J/s-8\cdot 0{,}5\cdot 12J/s=-30J/s$$

όπου η ισχύς της ροπής της τριβής είναι αρνητική, αφού θεωρώντας θετική τη δεξιόστροφη ροπή τ, η ροπή της τριβής είναι αρνητική, επιβραδύνοντας την περιστροφική κίνηση του τροχού. Έτσι τη στιγμή αυτή η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής μειώνεται κατά 30J/s.

γ) Η μηχανική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της **ολίσθησης** του τροχού και ο αντίστοιχος ρυθμός είναι ίσος με την ισχύ της τριβής, κατά απόλυτο τιμή.

$$P_T=\frac{dW_T}{dt}=\frac{T\cdot dx\cdot\sigma\upsilon\nu 180^o}{dt}=-T\cdot\upsilon_\Sigma=-8\cdot 2W=-16W$$

Οπότε $$\frac{dQ_\vartheta}{dt}=|P_T|=16J/s$$

Σχόλιο:

Τι ακριβώς συμβαίνει μόλις ο τροχός μπει στο Β επίπεδο;

Η δύναμη F παρέχει ενέργεια στον τροχό με ρυθμό 16J/s, αλλά η μεταφορική κινητική του ενέργεια αυξάνεται κατά 48J/s. Γιατί; Γιατί και η τριβή αυξάνει τη μεταφορική κινητική ενέργεια, κατά $T\cdot\upsilon_{cm}$=8·4J/s=32J/s.

Πού βρήκε η τριβή την παραπάνω ενέργεια; Ας έρθουμε στην περιστροφική κίνηση του τροχού. Η ροπή τ προσφέρει ενέργεια με ρυθμό 18J/s, αλλά η ροπή της τριβής αφαιρεί ενέργεια με ρυθμό $\tau_T\cdot\omega=T\cdot R\cdot\omega$=8·0,5·12J/s=48J. Το αποτέλεσμα βέβαια είναι να μειώνεται η περιστροφική κινητική ενέργεια κατά (48J-18J=30J). Από τα 48J/s που αφαιρεί η τριβή, τα 32J/s τα μετατρέπει σε μεταφορική κινητική ενέργεια και τα υπόλοιπα 16J/s μετατρέπονται σε θερμική ενέργεια.

dmargaris@gmail.com