

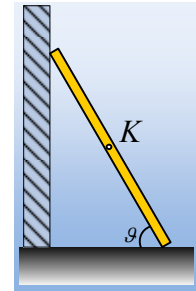
Περισσότεροι κινηματικοί περιορισμοί.

Αποκλειστικά και μόνο για Καθηγητές.

Αφήνουμε μια σκάλα ύψους 2m σε επαφή με λείο κατακόρυφο τοίχο και σε τέτοια θέση, ώστε να σχηματίζει με το έδαφος γωνία θ , όπου $\eta\mu\theta=0,8$. Η σκάλα αρχίζει να γλιστρά, αφού και το έδαφος είναι επίσης λείο.

Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση του μέσου K της σκάλας και η αρχική γωνιακή επιτάχυνση της σκάλας, στην παραπάνω θέση.

Θεωρείστε τη σκάλα σαν μια ομογενή δοκό, για την οποία η ροπή αδράνειας, ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της, δίνεται από τη σχέση $I = \frac{Ml^2}{12}$, ενώ $g=10\text{m/s}^2$.



Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σκάλα. Θεωρούμε την κίνηση της σκάλας σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφή γύρω από άξονα, κάθετο στο επίπεδο της σελίδας, ο οποίος περνά από το κέντρο μάζας της K. Τότε με εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma F_x = m a_{cmx} \rightarrow N_1 = m a_{cmx} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = m a_{cmy} \rightarrow mg - N_2 = m a_{cmy} \quad (2)$$

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$N_2 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - N_1 \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu\theta = \frac{I}{12} m \ell^2 \alpha_{\gamma\omega\nu}. \quad (3)$$

Ας έρθουμε τώρα στο κάτω άκρο A της σκάλας. Αυτό έχει τις επιταχύνσεις a_{cmx} και a_{cmy} , αλλά επιπλέον την επιτροχια επιτάχυνση:

$$\alpha_{\epsilon\pi} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\ell}{2}.$$

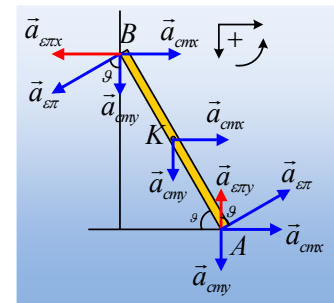
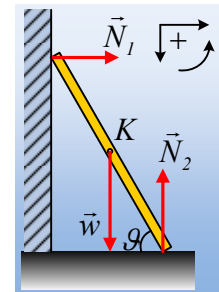
Αναλύουμε την επιτροχια επιτάχυνση σε μια κατακόρυφη συνιστώσα:

$$a_{\epsilon\pi y} = a_{\epsilon\pi} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

και μια οριζόντια $a_{\epsilon\pi x} = a_{\epsilon\pi} \cdot \eta\mu\theta$, (η έχει οποία δεν έχει σχεδιαστεί στο σχήμα, αφού δεν μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός της).

Αλλά το άκρο A θα κινηθεί οριζόντια, οπότε η επιτάχυνση στην κατακόρυφη διεύθυνση είναι μηδενική:

$$a_{cmy} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \quad (4)$$



Ερχόμαστε τώρα στο πάνω άκρο Β. Με την ίδια λογική, το σημείο Β δεν έχει οριζόντια επιτάχυνση, συνεπώς:

$$a_{cmx} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu\theta \quad (5)$$

Οι εξισώσεις (1), (2), (3), (4) και (5) αποτελούν ένα σύστημα, η λύση του οποίου θα μας δώσει τα ζητούμενα. Έτσι με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε:

$$(mg - ma_{cmy}) \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - ma_{cmx} \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu\theta = \frac{1}{12} m\ell^2 a_{\gamma\omega\nu} \cdot \rightarrow$$

$$g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta - \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu^2\theta = \frac{1}{6} \ell a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{6g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{\ell + 3\ell(\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta)} = \frac{3g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{2\ell}$$

Και με αντικατάσταση:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{2\ell} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 0,6}{2 \cdot 2} \text{ rad} / \text{s}^2 = 4,5 \text{ rad} / \text{s}^2$$

Αλλά τότε από την (4):

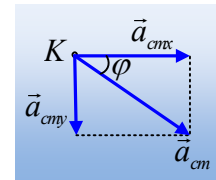
$$a_{cmy} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 4,5 \cdot 1 \cdot 0,6 \text{ m} / \text{s}^2 = 2,7 \text{ m} / \text{s}^2$$

Και από την (5):

$$a_{cmx} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu\theta = 4,5 \cdot 1 \cdot 0,8 \text{ m} / \text{s}^2 = 3,6 \text{ m} / \text{s}^2$$

$$\text{Οπότε } a_{cm} = \sqrt{a_{cmx}^2 + a_{cmy}^2} = \sqrt{2,7^2 + 3,6^2} \text{ m} / \text{s}^2 = 4,5 \text{ m} / \text{s}^2$$

$$\text{Ενώ } \epsilon\phi\phi = \frac{a_{cmy}}{a_{cmx}} = \frac{2,7}{3,6} = \frac{3}{4}$$



dmargaris@gmail.com