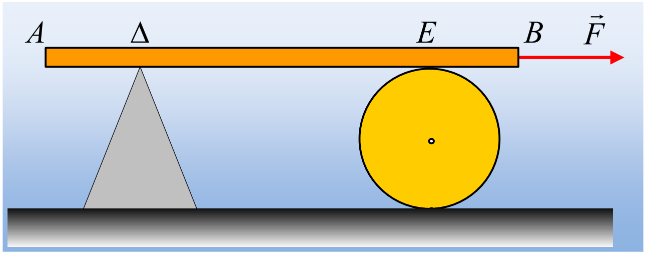
Τραβώντας μια δοκό οριζόντια.

Η ομογενής δοκός ΑΒ μήκους $\ell = 6m$ και μάζας Μ=12kg ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε λείο υποστήριγμα στο σημείο της Δ και σε κύλινδρο μάζας m=8 kg στο σημείο Ε, όπως στο σχήμα.



Σε μια στιγμή ασκούμε στη δοκό οριζόντια σταθερή δύναμη F=30N, με αποτέλεσμα η δοκός να κινηθεί, συμπαρασύροντας και τον κύλινδρο. Αν δεν παρατηρείται ολίσθηση, ούτε μεταξύ δοκού και κυλίνδρου, ούτε μεταξύ κυλίνδρου και εδάφους, ενώ (ΑΔ) = (ΕΒ)=1m, να βρεθούν:

i) Η επιτάχυνση του άξονα του κυλίνδρου ($α_{cm}$).

ii) Η επιτάχυνση της δοκού.

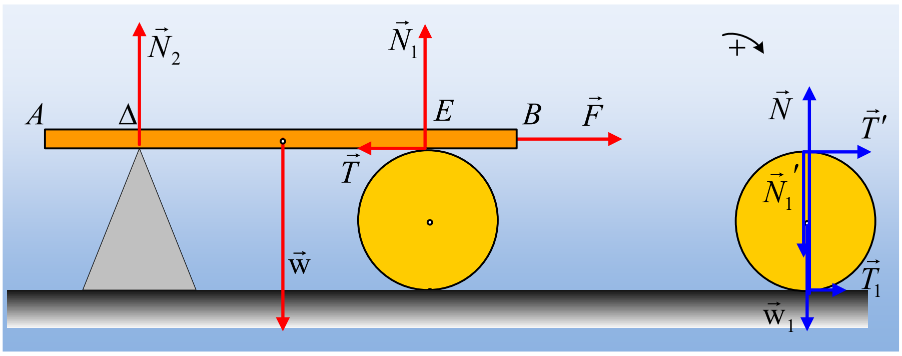
iii) Η απόσταση (ΒΕ΄) του άκρου της δοκού και του σημείου επαφής της Ε΄ με τον κύλινδρο, τη στιγμή που η δοκός χάνει την επαφή με το ακλόνητο στήριγμα.

iv) Ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής, τον οποίο εμφανίζει ο κύλινδρος με τη δοκό και το έδαφος για να μπορέσει να πραγματοποιηθεί η παραπάνω μετακίνηση.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του Ι= ½ mR^2 και g=10m/s^2.

Απάντηση:

Στο αριστερό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις μόνο στη δοκό, ενώ δεξιά στον κύλινδρο, όπου Τ η στατική τριβή που ασκείται από τον κύλινδρο στη δοκό και Τ΄ η αντίδρασή της που ασκείται στον κύλινδρο. Εξάλλου T_1 είναι η στατική τριβή που ασκείται στον κύλινδρο από το έδαφος.



i) Για την κίνηση της δοκού ο 2^{ος} νόμος του Νεύτωνα μας δίνει:

$$ΣF=Mα \rightarrow F\text{-}T=M\cdot α \quad (1)$$

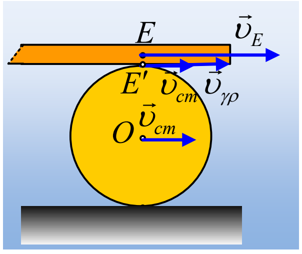
Θεωρώντας σύνθετη την κίνηση του κυλίνδρου, θα έχουμε:

Μεταφορική κίνηση: $T΄+T_1=m\cdot α_{cm}$ (2)

Στροφική κίνηση: $T΄\cdot R\text{-}T_1R = I\cdot α_{γων} \rightarrow T΄\text{-}T_1= ½\, mR\cdot α_{γων}$ (3)

Αλλά ο κύλινδρος δεν ολισθαίνει στο έδαφος, συνεπώς κυλίεται και $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot R$ και με πρόσθεση των (2) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$2T' = \frac{3}{2} m a_{cm} \to T = \frac{3}{4} m a_{cm} \quad (4)$$



Υπάρχει εδώ κάποιος σύνδεσμος που θα μας επιτρέψει να «συνδέσουμε» την κίνηση της δοκού με την κίνηση του κυλίνδρου; Ας εστιάσουμε στο σημείο επαφής τους. Για να μην γλιστρά η δοκός, θα πρέπει η ταχύτητά της (υ_E) να είναι ίση με την ταχύτητα του σημείου Ε΄ του κυλίνδρου που έρχεται σε επαφή με τη δοκό.

Αλλά $\upsilon_{E'}=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}=\upsilon_{cm}+\omega\cdot R=\upsilon_E$. Με παραγώγιση παίρνουμε:

$$\frac{d\upsilon_E}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} + \frac{d(\omega R)}{dt} \to$$

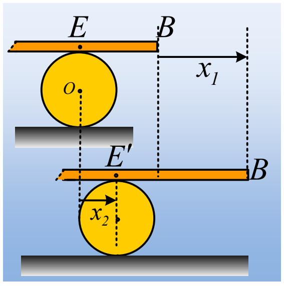
$$\alpha=\alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\omega\nu}R=2\alpha_{cm} \quad (5)$$

Με πρόσθεση τώρα κατά μέλη των (1) και (4) λαμβάνοντας υπόψη την σχέση (5) παίρνουμε:

$$F=M\cdot\alpha + \frac{3}{4} m a_{cm} \to F = \left(2M + \frac{3m}{4}\right) a_{cm} \to$$

$$a_{cm} = \frac{F}{2M + \frac{3m}{4}} = \frac{30}{2\cdot 12 + \frac{3}{4}8} m/s^2 = 1 m/s^2$$

ii) Οπότε η δοκός με βάση την (5) αποκτά επιτάχυνση $\alpha=2\alpha_{cm}=2 m/s^2$.



iii) Για να χαθεί η επαφή της δοκού με το ακίνητο στήριγμα, πρέπει να μετατοπισθεί κατά x_1=1m, όπου:

$$x_1 = \frac{1}{2} a t^2 \to t = \sqrt{\frac{2x_1}{a}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1}{2}} s = 1s$$

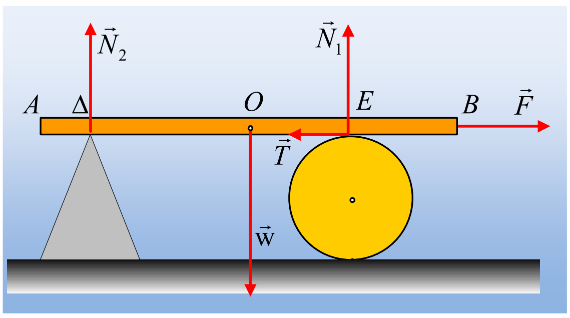
Αλλά τότε ο κύλινδρος έχει μετατοπισθεί κατά:

$$x_2 = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 = \frac{1}{2} 1\cdot 1^2 m = 0{,}5m$$

και η εικόνα είναι αυτή του διπλανού σχήματος, από όπου προκύπτει ότι:

$$(BE')=(EB)+x_1-x_2=1{,}5m.$$

iv) Έστω κάποια στιγμή που η δοκός έχει μετατοπισθεί κατά x.



Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, ο άξονας του κυλίνδρου έχει μετατοπισθεί κατά ½ x και το σημείο επαφής δοκού-κυλίνδρου απέχει κατά (1+x/2) από το άκρο Β. Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό.

Η δοκός δεν περιστρέφεται, οπότε $\Sigma\tau_O=0$ ή

$$N_1\left(\frac{\ell}{2}-1-\frac{x}{2}\right)-N_2\left(\frac{\ell}{2}-1+x\right)=0\rightarrow$$

$$N_1\left(2-\frac{x}{2}\right)=N_2(2+x)\rightarrow\frac{N_1}{N_2}=\frac{4+2x}{4-x}>1 \quad (5)$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι καθώς η δοκός κινείται προς τα δεξιά η κάθετη αντίδραση N_1 από τον κύλινδρο αυξάνεται, ενώ μειώνεται η αντίδραση από το στήριγμα. Αλλά τότε αυξάνεται και η οριακή στατική τριβή, που θα μπορούσε να ασκηθεί (για ορισμένη τιμή του συντελεστή οριακής στατικής τριβής), αφού $T_{o\rho}=\mu_s\cdot N_1$.

Αλλά τότε για να μην έχουμε ολίσθηση, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ώστε η τριβή να είναι στατική, στην αρχική θέση, όπου έχουμε την μικρότερη αντίδραση από τον κύλινδρο.

Αλλά από την εξίσωση (4) παίρνουμε $T=\frac{3}{4}ma_{cm}=\frac{3}{4}8\cdot 1N=6N$, ενώ αφού η ράβδος ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση $\Sigma F_y=0$ ή $N_1+N_2=w=120N$. Όμως από την (5) για x=0 βρίσκουμε $N_1=N_2$, οπότε: $N_1+N_2=120N \rightarrow 2N_1=120N$ ή $N_1=60N$.

Για να μην ολισθήσει όμως η δοκός πρέπει η ασκούμενη τριβή να είναι στατική, δηλαδή:

$$T\le T_{o\rho}\rightarrow T\le\mu_s N_1 \text{ ή } \mu_s\ge\frac{T}{N_1}\rightarrow\mu_s\ge\frac{6}{60}\rightarrow\mu_s\ge 0,1$$

Συνεπώς ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ δοκού και κυλίνδρου, για να μην έχουμε ολίσθηση, είναι $\mu_s=0,1$.

Ερχόμαστε τώρα στην (2) : $T'+T_1=m\cdot\alpha_{cm}\rightarrow T_1=m\alpha_{cm}-T=8\cdot 1N-6N=2N$, ενώ:

$$N=N_1'+w_1=N_1+mg=60N+80N=140N.$$

Με την ίδια, όπως παραπάνω λογική, θα πρέπει να ισχύει:

$$T_1\le T_{o\rho}\rightarrow T_1\le\mu_{s/1}N \text{ ή } \mu_{s/1}\ge\frac{T_1}{N}\rightarrow\mu_{s/1}\ge\frac{2}{140}\rightarrow\mu_{s/1}\ge\frac{1}{70}$$

Συνεπώς ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ κυλίνδρου και επιπέδου, για να μην έχουμε ολίσθηση, είναι $\mu_{s/1}=\frac{1}{70}$.

dmargaris@gmail.com