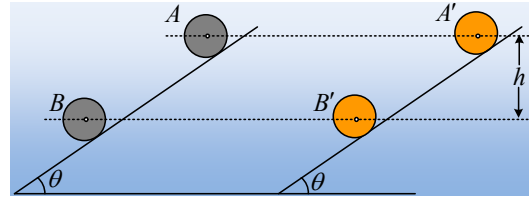


### Δύο κινήσεις σε κεκλιμένα επίπεδα.

Έστω δύο κεκλιμένα επίπεδα με την ίδια κλίση  $\theta$ . Το πρώτο είναι λείο, ενώ το δεύτερο όχι. Κάποια στιγμή αφήνουμε στο πρώτο, στη θέση A, μια σφαίρα ακτίνας R και μάζας M και στο δεύτερο, στη θέση A', έναν κύλινδρο ίδιας ακτίνας και μάζας, ο οποίος κυλιέται. Τα σημεία A και A' βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Στο σχήμα βλέπετε τα στερεά να φτάνουν σε νέες θέσεις B και B' με υψομετρική διαφορά h, σε σχέση με τις θέσεις που αφέθηκαν να κινηθούν.



i) Πρώτο κατέβηκε κατά h:

α) η σφαίρα, β) ο κύλινδρος, γ) φτάσανε ταυτόχρονα.

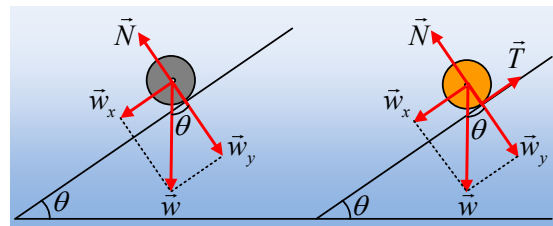
ii) Μεγαλύτερη κινητική ενέργεια στις κάτω θέσεις έχει:

α) η σφαίρα, β) ο κύλινδρος, γ) έχουν ίσες κινητικές ενέργειες.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

#### Απάντηση:

i) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα, όπου στον κύλινδρο ασκείται και δύναμη τριβής με φορά προς τα πάνω, η ροπή της οποίας θα προκαλέσει και την γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου, με αποτέλεσμα να κυλιέται. Από το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα για τη μεταφορική κίνηση παίρνουμε:



$$\text{Για τη σφαίρα: } \Sigma F_x = M a_{cm1} \rightarrow w_x = M \cdot a_{cm1} \rightarrow a_{cm1} = \frac{Mg \cdot \eta \mu \theta}{M} = g \cdot \eta \mu \theta \quad (1)$$

$$\text{Για τον κύλινδρο: } \Sigma F_x = M a_{cm2} \rightarrow w_x - T = M \cdot a_{cm2} \rightarrow a_{cm2} = \frac{Mg \cdot \eta \mu \theta - T}{M} \rightarrow$$

$$a_{cm2} = g \cdot \eta \mu \theta - \frac{T}{M} = a_{cm1} - \frac{T}{M} \quad (2)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι η σφαίρα θα κινηθεί με μεγαλύτερη επιτάχυνση και εκτελώντας (μεταφορική) ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, θα φτάσει σε μικρότερο χρόνο στη θέση B ( $x = \frac{1}{2} a_{cm} t^2$ ). Σωστό το α).

ii) Η σφαίρα θα εκτελέσει μόνο μεταφορική κίνηση, αφού δεν δέχεται καμιά ροπή, ενώ ο κύλινδρος κυλιέται. Κατά την κύλιση όμως η ασκούμενη τριβή είναι στατική, η οποία δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της και δεν παράγει έργο. Έτσι στη διάρκεια και των δύο κινήσεων η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή. Θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που

περνά από τις θέσεις B και B' ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας, παίρνουμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$K_{τελ} = K_B = K_{B'} = Mgh$$

Τα δύο στερεά, έχουν δηλαδή ίσες κινητικές ενέργειες τις στιγμές που έχουν κατέλθει κατακόρυφα κατά h.

### Σχόλιο:

Η κινητική ενέργεια της σφαίρας στη θέση B, είναι:

$$K_B = \frac{1}{2} M v_{cm1}^2$$

Ενώ η αντίστοιχη του κυλίνδρου:

$$K_{B'} = \frac{1}{2} M v_{cm2}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Τα πρώτα μέλη είναι ίσα, αλλά τότε η μεταφορική κινητική ενέργεια του κυλίνδρου, θα είναι μικρότερη από την κινητική ενέργεια της σφαίρας. Πράγμα που σημαίνει ότι και  $v_{cm2} < v_{cm1}$ , δηλαδή σε κάθε θέση η σφαίρα κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα κέντρου μάζας από τον κύλινδρο.

Συμπέρασμα: Η σφαίρα κινείται (μεταφορικά) πιο γρήγορα, φτάνει πρώτη στη θέση B με μεγαλύτερη ταχύτητα κέντρου μάζας, αλλά έχει την ίδια κινητική ενέργεια με τον κύλινδρο, ο οποίος, ένα μέρος αυτής της ενέργειας, την έχει ως περιστροφική!

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)