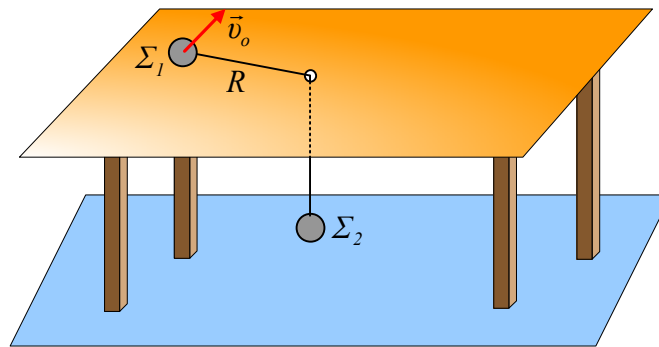


Η κυκλική κίνηση και η ανύψωση του σώματος.



Πάνω σε ένα λείο τραπέζι συγκρατούμε μια μικρή σφαίρα Σ_1 , η οποία είναι δεμένη στο ένα άκρο νήματος. Το νήμα περνά από μια μικρή τρύπα, στο κέντρο του τραπεζιού και στο άλλο του άκρο είναι δεμένη και κρέμεται μια άλλη ίσης μάζας σφαίρα Σ_2 . Σε μια στιγμή εκτοξεύουμε οριζόντια τη σφαίρα Σ_1 με αρχική ταχύτητα $v_0 = \sqrt{Rg}$, με κατεύθυνση κάθετη στο νήμα, όπου R το μήκος του οριζόντιου τμήματος του νήματος.

i) Η σφαίρα Σ_2 :

α) θα συνεχίσει να ηρεμεί, β) θα κινηθεί προς τα πάνω, γ) θα κινηθεί προς τα κάτω.

ii) Επαναλαμβάνουμε το πείραμα αλλά τώρα προσδίδουμε μεγαλύτερη αρχική ταχύτητα v_{01} στη σφαίρα Σ_1 . Το αποτέλεσμα είναι η σφαίρα Σ_2 να κινηθεί προς τα πάνω και να ανυψωθεί κατά $h = \frac{1}{2}R$, φτάνοντας σε σημείο Α. Για την ταχύτητα v_{01} εκτόξευσης ισχύει:

$$\alpha) v_{01} = \sqrt{1,2Rg}, \quad \beta) v_{01} = \sqrt{1,5Rg}, \quad \gamma) v_{01} = \sqrt{1,8Rg}.$$

iii) Τελικά η σφαίρα Σ_2 θα παραμείνει στην θέση Α ή θα κινηθεί ξανά προς τα κάτω;

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

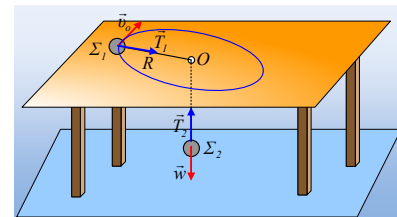
Απάντηση:

i) Μόλις εκτοξευθεί η σφαίρα Σ_1 θα δεχτεί δύναμη από το νήμα με τιμή:

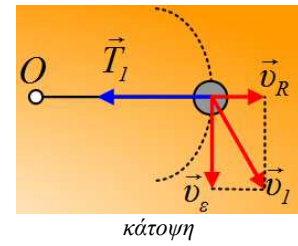
$$T_1 = F_k = m \frac{v_0^2}{R} = m \frac{Rg}{R} = mg$$

Αλλά τότε το νήμα ασκεί ίσου μέτρου δύναμη T_2 (η τάση του νήματος) και στη σφαίρα Σ_2 η οποία ισορροπεί. Δηλαδή η Σ_1 θα εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση με κέντρο O και ακτίνα R , ενώ η Σ_2 θα παραμείνει ακίνητη. Σωστό το β).

ii) Τη στιγμή που η Σ_2 σταματά να κινείται προς τα πάνω, μηδενίζεται η ταχύτητά της. Αλλά αυτό σημαίνει ότι το μήκος του τμήματος του νήματος που κρέμεται από το τραπέζι δεν μεταβάλλεται, οπότε και το οριζόντιο τμήμα του νήματος έχει σταθερό μήκος $R_1 = 1,5R$.



Αλλά έστω ότι τη στιγμή αυτή η σφαίρα Σ_1 έχει ταχύτητα v_1 , όπως στο σχήμα. Αναλύουμε την ταχύτητα αυτή σε δυο συνιστώσες, v_ϵ κάθετη στο νήμα και v_R στη διεύθυνση του νήματος. Αν υπάρχει συνιστώσα $v_R \neq 0$, τότε και το άκρο του νήματος θα έχει την ίδια ταχύτητα, πράγμα που σημαίνει ότι το μήκος του νήματος, πάνω στο τραπέζι αυξάνεται, πράγμα άτοπο.



Συμπέρασμα, τη στιγμή αυτή η ταχύτητα v_1 ταυτίζεται με την v_ϵ είναι δηλαδή ξανά κάθετη στο νήμα.

Κατά τη διάρκεια της κίνησης της σφαίρας Σ_1 η στροφορμή της ως προς το O παραμένει σταθερή, αφού δεν δέχεται καμιά ροπή, μιας και η τάση του νήματος περνά από το O, ενώ $\Sigma F_y = 0$ (ή διαφορετικά w και N έχουν αντίθετες ροπές ως προς O). Συνεπώς από τη διατήρηση της στροφορμής παίρνουμε:

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_1 \text{ ή}$$

$$Mv_{0l}R = mv_1 \cdot 1,5R \rightarrow v_1 = \frac{2}{3}v_{0l} \quad (1)$$

Εξάλλου από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας για το σύστημα των δύο σωμάτων, θεωρώντας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από την αρχική θέση της σφαίρας Σ_2 , ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας, παίρνουμε:

$$K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_{0l}^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh + mg \frac{1}{2}R \rightarrow$$

$$v_{0l}^2 = v_1^2 + mgR \rightarrow$$

$$v_{0l}^2 = \frac{4}{9}v_{0l}^2 + gR \rightarrow v_{0l} = \sqrt{1,8Rg}$$

Σωστό το γ)

iii) Στην παραπάνω θέση η κεντρομόλος δύναμη που ασκείται στη Σ_1 έχει μέτρο:

$$F_\kappa = m \frac{v_1^2}{R_1} = m \frac{\frac{4}{9}1,8Rg}{\frac{3}{2}R} = \frac{8}{15}mg$$

Αλλά τότε και η σφαίρα Σ_2 δέχεται την τάση του νήματος με μέτρο $8/15 mg$ και η σφαίρα θα επιταχυνθεί ξανά προς τα κάτω.

dmargaris@gmail.com